MEETKUNDE EN ALGEBRA

door

Prof. Dr. F.D. Veldkamp

Mathematisch Instituut
der Rijksuniversiteit
te Utrecht

REPRODUKTIE
FYSISCH LABORATORIUM

MEETKUNDE EN ALGEBRA

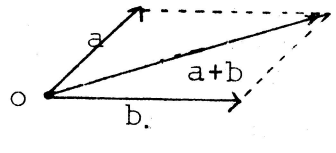
door

Prof. Dr. F.D. Veldkamp

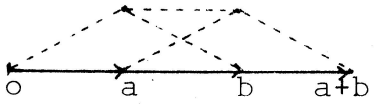
§1. MEETKUNDE EN ALGEBRA IN HET EUCLIDISCHE VLAK.

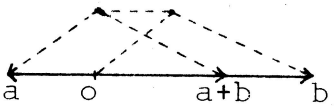
In deze paragraaf geven we een aanschouwelijke, niet exacte, inleiding tot een aantal zaken die verder in dit dictaat uitvoeriger behandeld zullen worden. De bedoeling is, de lezer vertrouwd te maken met een aantal begrippen die we later precieser en algemener zullen definiëren. Hiermee hopen we te voorkomen dat de latere definities te zeer uit de lucht komen vallen en geen aansluiting vinden bij meetkundige aanschouwing en algemeen wiskundige intuitie.

(1.1) We beginnen in het euclidische vlak, zoals u dat op de middelbare school hebt leren kennen; ter afkorting noteren we dat als $\mathbb{E}^2$. Daarin kiezen we een vast punt, oorsprong of nulpunt genaamd en genoteerd als o. Voor een algebraisering van de meetkunde blijkt het uiterst nuttig te zijn, de punten van $\mathbb{E}^2$ aan te duiden door een vector, dat is een pijl van o naar het betreffende punt, zoals u die waarschijnlijk kent uit de mechanica of wellicht ook uit de analytische meetkunde. Als notatie voor vectoren kiezen we kleine latijnse letters a,b,c,...,x,y,... (zonder pijlen of strepen erboven of eronder!). In veel gevallen zullen we dezelfde letter gebruiken voor een vector én voor z'n eindpunt. Twee vectoren kunnen we optellen volgens de parallelogramregel: we tekenen het parallelogram met a en b als zijden; de vector vanuit o naar het overstaande hoekpunt is de som van a en b, notatie a+b. Vallen a en b in elkaars verlengde dan ontaardt deze constructie;

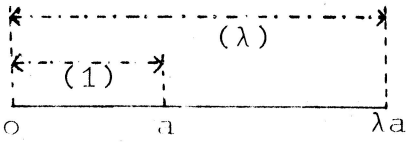


in dat geval verschuiven we a met z'n beginpunt o naar het eindpunt van b, het eindpunt van a komt dan terecht in het punt dat we als eindpunt van a+b nemen:

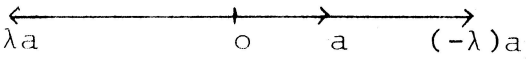




Is a een vector en λ een reëel getal, dan bedoelen we, voor $\lambda > 0$, met λa de vector met dezelfde richting als a, maar met een lengte die λ maal de lengte van a is:

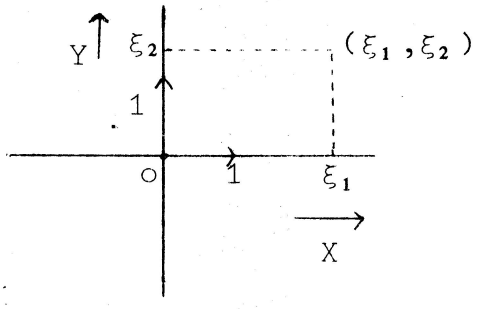


Voor $\lambda < 0$ krijgen we λa als volgt: neem $(-\lambda)a$ als boven en keer die van richting om:



We noemen deze vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal de <u>scalaire vermenigvuldiging</u>.

(1.2) Om ons wat meer inzicht te verschaffen in de "rekenregels" van optelling en scalaire vermenigvuldiging, voeren we een (rechthoekig) coördinatenstelsel in, d.w.z. we kiezen door o een X-as en een Y-as loodrecht op elkaar, met op elk dezelfde lengte-eenheid. Elk punt van het vlak wordt nu beschreven door



z'n coördinaten, nl. een X-coördinaat ξ_1 en een Y-coördinaat ξ_2; we schrijven (ξ_1, ξ_2) voor dat punt. Maar de vector van o naar (ξ_1, ξ_2) kunnen we door hetzelfde tweetal getallen (ξ_1, ξ_2) aangeven.

Merk op, dat we hier de conventie invoeren, reële getallen steeds door kleine griekse letters aan te duiden. Stel nu, we hebben twee vectoren $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ en $b = (\beta_1, \beta_2)$. Hoe ziet a+b er in coördinaatvorm uit? Met wat elementaire analytische meetkunde is dit eenvoudig te berekenen. De lijn door o langs de vector (α_1, α_2) wordt gegeven door de vergelijking

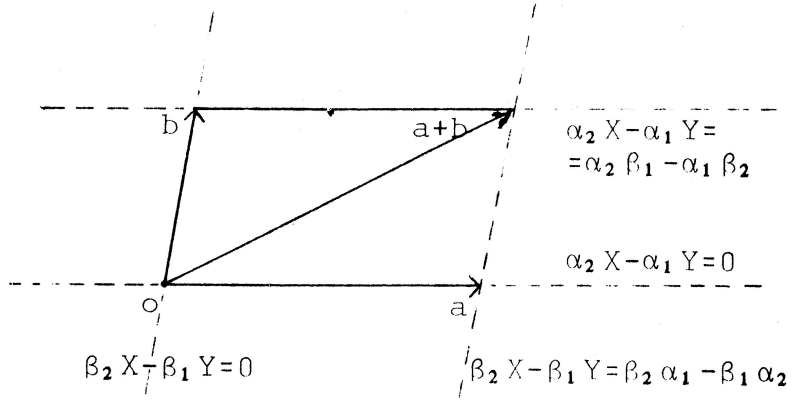
$$\alpha_2 X - \alpha_1 Y = 0$$

(zie figuur), dus de lijn evenwijdig hieraan door het eindpunt van de vector b door

$$\alpha_2 X - \alpha_1 Y = \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 .$$

Evenzo wordt de lijn door het eindpunt van de vector a, die evenwijdig loopt met de vector b, gegeven door

$$\beta_2 X - \beta_1 Y = \beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2 .$$



Door deze twee vergelijkingen op te lossen vinden we de coördinaten van (het eindpunt van) de vector a+b, en wel $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$. De coördinaten van λa, met $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ zijn nog gemakkelijker te berekenen: vermenigvuldigen we alle lijnstukken vanuit o met een factor λ, dan gaat a over in λa, α_1 in $\lambda\alpha_1$ en α_2 in $\lambda\alpha_2$. Immers, α_1 en α_2 zijn lengtes langs de twee assen. Dus $\lambda a = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2)$. Uit de rekenregels voor reële getallen (die we hier bekend veronderstellen) zijn nu zonder veel moeite een aantal rekenregels voor vectoren af te leiden. Bijvoorbeeld, uit de commutatieve wet voor reële getallen,

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

volgt de commutatieve wet voor vectoren:

$a + b = b + a.$

Immers, is $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ en $b = (\beta_1, \beta_2)$, dan is

$a + b = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2) = (\beta_1+\alpha_1, \beta_2+\alpha_2) = b + a.$

Leid zelf op analoge wijze de associatieve wet voor vectoren af:

$(a+b) + c = a + (b+c).$

Een bijzondere vector is die met eindpunt in o; we noteren die ook met o. In coördinaten ziet hij er uit als (0,0). Het is nu eenvoudig in te zien dat

$o + a = a$

voor iedere vector a. Is $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, dan duiden we de vector $(-\alpha_1, -\alpha_2)$ aan met -a. Deze voldoet aan de relatie:

$a + (-a) = o$

en is, bij gegeven a, de enige vector die dat doet (ga na!). -a heet de <u>tegengestelde</u> van a. De vector $x = b + (-a)$ is de enige oplossing van de vergelijking

$a + x = b$

(waarom?); we schrijven meestal b-a i.p.v. $b + (-a)$. Rekenregels, waarin de scalaire vermenigvuldiging voorkomt, zijn de volgende.

$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ (a een vector, λ en μ reële getallen).

Dit bewijst men door weer $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ te stellen en dan te gaan rekenen:

$$\begin{aligned} \lambda(\mu a) &= \lambda(\mu\alpha_1, \mu\alpha_2) \\ &= (\lambda(\mu\alpha_1), \lambda(\mu\alpha_2)) \\ &= ((\lambda\mu)\alpha_1, (\lambda\mu)\alpha_2) \\ &= (\lambda\mu)a. \end{aligned}$$

Bewijs zelf de volgende rekenregels.

$(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$

$\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

$1 \cdot a = a$

$\lambda o = o$

$\lambda(-a) = (-\lambda)a = -(\lambda a)$.

Met deze rekenregels voor vectoren kunnen we al heel wat meetkunde bedrijven. We geven hiervan één klein voorbeeldje. De lijn door o langs de vector $a \neq o$ bestaat uit de eindpunten van de vectoren λa, voor alle reële λ, dus de lijn door het punt b evenwijdig met de vector a bestaat uit de punten $b + \lambda a$.

(1.3) Bij het rekenen met vectoren stuiten we algemeen vaak op uitdrukkingen van de gedaante $\lambda a + \mu b$, waarin a en b vectoren zijn en λ en μ reële getallen. Zoiets noemen we een <u>lineaire combinatie</u> van a en b. Het kan zijn dat voor bepaalde waarden van λ en μ, niet beide 0, $\lambda a + \mu b = o$ is. In dat geval is één van twee vectoren een veelvoud van de ander. Is bijvoorbeeld $\lambda \neq 0$, dan is $a = -\lambda^{-1}\mu b$. Let wel: niet elk van de twee vectoren a en b hoeft in deze situatie een veelvoud van de ander te zijn; neem bijvoorbeeld $a = o$ en $b \neq o$ dan is $1.a + o.b = o$, en $a = o.b$, maar b is géén veelvoud van a! Bestaat er een relatie $\lambda a + \mu b = o$ met λ en μ niet allebei 0, dan heten a en b <u>lineair afhankelijk</u>. Bestaat een dergelijke relatie niet, dan heten a en b <u>lineair onafhankelijk</u>. Een andere manier om dit te zeggen is de volgende: a en b zijn lineair onafhankelijk, als uit een relatie $\lambda a + \mu b = o$ noodzakelijk volgt dat $\lambda = \mu = 0$. Voorbeeld: beschouw de vectoren $a = (1,0)$ en $b = (2,1)$. Om na te gaan of ze al of niet lineair afhankelijk zijn, zoeken we de waarden λ en μ waarvoor $\lambda a + \mu b = o$.

$\lambda(1,0) + \mu(2,1) = (0,0)$

$(\lambda+2\mu,\mu) = (0,0)$.

Dan moet dus voldaan zijn aan de vergelijkingen

$$\lambda + 2\mu = 0$$

$$\mu = 0.$$

Hieruit volgt direct dat $\lambda = \mu = 0$. Dus zijn a en b lineair onafhankelijk. Daarentegen zijn bijvoorbeeld (2,1) en (4,2) lineair afhankelijk; ga na!

Beschouw de vectoren $e_1 = (1,0)$ en $e_2 = (0,1)$. Deze zijn lineair onafhankelijk, want uit $\lambda(1,0) + \mu(0,1) = (0,0)$ volgt $(\lambda,\mu) = (0,0)$, dus $\lambda = \mu = 0$. Iedere vector x uit E^2 kunnen we schrijven als

$$x = (\xi_1,\xi_2) = \xi_1(1,0) + \xi_2(0,1) = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 .$$

We zeggen: x is een <u>lineaire combinatie</u> van e_1 en e_2. Een tweetal lineair onafhankelijke vectoren, waarvan iedere andere vector een lineaire combinatie is, heet een <u>basis</u>. Uit bovenstaande berekening is duidelijk, dat x op precies één manier te schrijven is als lineaire combinatie van e_1 en e_2.

Er zijn ook andere tweetallen vectoren in E^2 die een basis vormen; neem bijvoorbeeld $f_1 = (1,0)$ en $f_2 = (2,1)$, die zijn lineair onafhankelijk zoals we boven gezien hebben. Voor elke $x = (\xi_1,\xi_2)$ zoeken we nu coëfficienten λ_1 en λ_2 zodat

$$x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 .$$

Dan is dus

$$(\xi_1,\xi_2) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2).$$

Uitgeschreven levert dit

$$\xi_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2$$

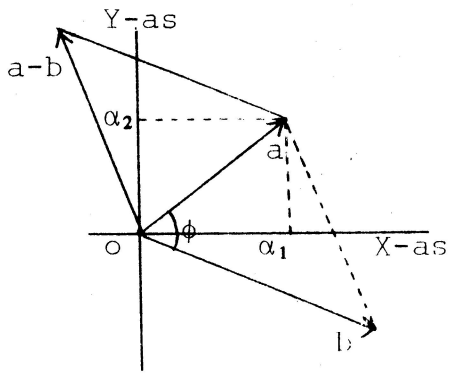
$$\xi_2 = \lambda_2 .$$

Door eliminatie vinden we

$$\lambda_1 = \xi_1 - 2\xi_2 , \quad \lambda_2 = \xi_2 .$$

Daarmee is aangetoond dat f_1 en f_2 een basis vormen. Men kan aantonen: ieder tweetal lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{E}^2$ is een basis. We zullen dat later in een algemener kader bewijzen, en 't hier bij bovenstaande voorbeelden laten.

(1.4) In andere meetkundige beschouwingen spelen de begrippen lengte en hoek een rol; we gaan deze nader onderzoeken. Uit de stelling van Pythagoras leidt men zonder veel moeite af dat de lengte van de vector $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ gelijk is aan $|a| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$. Om de hoek tussen de vectoren $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ en $b = (\beta_1, \beta_2)$ (a en b niet o) te berekenen, gebruiken we de cosinusregel. We merken eerst op dat de vector $a-b$ een zijde is van het



parallelogram met b als andere zijde en a als diagonaal door o. De zijde tegenover o van de driehoek waarvan de vectoren a en b twee zijden zijn, heeft dus lengte $|a-b| = \sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2 + (\alpha_2-\beta_2)^2}$. Is ϕ de hoek tussen a en b, dan zegt de cosinusregel

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\phi.$$

$$(\alpha_1-\beta_1)^2 + (\alpha_2-\beta_2)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 - 2|a||b|\cos\phi.$$

$$2|a||b|\cos\phi = 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)$$

$$\cos\phi = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{|a|\ \ |b|}.$$

Voor de uitdrukking $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ schrijven we (a,b). Dit heet het <u>inproduct</u> (of ook wel inwendig product) van a en b. Met deze notatie hebben we dan

$$|a| = \sqrt{(a,a)}$$

$$\cos\phi = \frac{(a,b)}{|a||b|} = \frac{(a,b)}{\sqrt{(a,a)(b,b)}}.$$

Loodrechte stand van de vectoren a en b, $a \perp b$, betekent dat $\phi = \frac{1}{2}\pi$ of $\frac{3}{2}\pi$, dus $\cos\phi = 0$. Maar dat is equivalent met de eis:

$$(a,b) = 0.$$

Voor $a = o$ of $b = o$ is ook $(a,b) = o$; we spreken af dat de o-vector geacht wordt loodrecht op alle vectoren te staan. Het inproduct heeft, opgevat als functie van twee vectoren, betrekkelijk eenvoudige eigenschappen. Zo geldt dat, bij vaste a, het inproduct (a,x) een lineaire functie van de coördinaten van x is, immers

$$(a,x) = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 \text{ voor } x = (\xi_1,\xi_2).$$

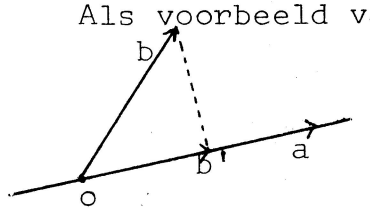
Hieruit volgt dat

$$(a,\lambda x) = \lambda(a,x) \text{ voor reële } \lambda,$$

en $(a,x+y) = (a,x) + (a,y)$.

Wegens deze twee rekenregels zeggen we: (a,x) is (bij vaste a) een <u>lineaire functie</u> van x. Evenzo is, voor vaste b, het inproduct (x,b) een lineaire functie van x. Deze twee eigenschappen vat men samen door te zeggen: (x,y) is een <u>bilineaire functie</u> van x en y. Merk verder op dat $(x,x) > 0$ voor alle $x \neq o$.

Als voorbeeld van hoe met inproducten te rekenen, zullen we de projectie bepalen van een vector b op de lijn door de vector a. Noem deze projectie b'. Dan moet $b' = \lambda a$. Anderzijds is $b-b' \perp a$, dus



$$(b - \lambda a, a) = 0$$

$$(b,a) - \lambda(a,a) = 0.$$

Hieruit volgt $\lambda = (a,a)^{-1}(b,a)$, dus $b' = (a,a)^{-1}(b,a)a$.

(1.5) Wat we hier in de $\mathbb{E}^2$ gedaan hebben, zouden we nu ook in de euclidische ruimte $\mathbb{E}^3$ kunnen gaan doen.

De zaken worden dan iets ingewikkelder, maar essentieel verandert er niet veel. Maar uit het bovenstaande is u misschien al enigszins duidelijk geworden dat de dimensie helemaal niet zo belangrijk is: het enige punt waarbij de dimensie van $\mathbb{E}^2$, d.w.z. 2, echt om de hoek kwam kijken, was bij het feit dat een basis van $\mathbb{E}^2$ uit precies 2 vectoren blijkt te bestaan. Maar het ligt voor de hand te zoeken naar generalisaties waarbij men een basis krijgt van n vectoren, met n een willekeurig natuurlijk getal. We zullen in een aantal volgende paragrafen van dit dictaat deze algemenere theorie gaan ontwikkelen. De gezochte generalisaties zijn de zogenaamde lineaire ruimten, waar we later dan een inproduct aan gaan toevoegen; de theorie van deze zaken pleegt men lineaire algebra te noemen.

§2. LINEAIRE RUIMTEN.

Zoals in de moderne wiskunde gebruikelijk is, gaan we de verdere theorie opbouwen op een stelsel axioma's. Het is goed om zich bij deze axioma's meetkundige interpretaties voor te stellen, zoals we die bijvoorbeeld in §1 ontwikkeld hebben. Maar anderzijds dient u wél te bedenken, dat er totaal andere "systemen" zijn, die niets met de aanschouwelijke meetkunde te maken hebben, maar waarvan de objecten evengoed aan onze axioma's voldoen en die dus ook door deze theorie beschreven worden. We zullen hier later voorbeelden van geven.

Bij de axioma's die we zo direct zullen opschrijven, is er één verschil met §1 waar we u bij voorbaat attent op willen maken. In §1 hebben we voor de scalaire vermenigvuldiging steeds reële getallen gebruikt. In de algemene theorie kan men echter ook met complexe getallen werken; dit blijkt later soms belangrijke voordelen te hebben, ook voor de toepassingen. Men moet echter wel vastleggen, of men alleen reële getallen toelaat, òf alle complexe getallen.

(2.1) DEFINITIE. Zij k het systeem van de reële getallen -dat we met $\mathbb{R}$ aanduiden-, òf het systeem van de complexe getallen -genoteerd als $\mathbb{C}$. Onder een lineaire ruimte of vectorruimte over k verstaan we een verzameling R, waarvan we de elementen meestal vectoren noemen, en waarin we een optelling, door + aangèduid, gedefinieerd hebben tussen elk tweetal elementen, en een scalaire vermenigvuldiging met de elementen van k, die we aanduiden door achter elkaar schrijven soms met een punt ertussen.

Daarbij moet aan de volgende axioma's zijn voldaan.

1. Voor alle x en y uit R is er precies één $z \in R$ zodat $z = x+y$. z heet de som van x en y.
2. $x+y = y+x$ voor alle x en y uit R (commutatieve wet van de optelling).
3. $x + (y+z) = (x+y) + z$ voor alle $x,y,z \in R$ (associatieve wet van de optelling).
4. Er is een element van R, genoteerd als o en nulelement of nul(vector) genaamd, zodat $o+x = x$ voor alle $x \in R$.
5. Bij elke $x \in R$ bestaat er een element van R, dat we noteren als -x en de tegengestelde van x noemen, zodat
$$x + (-x) = o.$$
6. Voor elke $\lambda \in k$ en $x \in R$ is er precies één $z \in R$, die we noteren als $z = \lambda x$; we noemen dit het λ-voud van x, of scalair product van λ en x.
7. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$ voor alle $\lambda,\mu \in k$ en $x \in R$.
8. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ voor alle $\lambda,\mu \in k$ en $x \in R$.
9. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ voor alle $\lambda \in k$ en $x,y \in R$.
10. $1x = x$ voor alle $x \in R$.

Pas op het nulelement o van R niet te verwarren met het getal 0 uit k. Voor $k = \mathbb{R}$ noemen we R een reële lineaire ruimte, voor $k = \mathbb{C}$ een complexe lineaire ruimte. Soms wordt voor de scalaire vermenigvuldiging wel systematisch $x\lambda$ geschreven in plaats van λx ($x \in R$, $\lambda \in k$). Voor $k = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ maakt dit geen verschil. In dit dictaat zullen we uitsluitend de notatie λx gebruiken. De elementen van een lineaire ruimte noemen we vaak vectoren.

(2.2) Een aantal formele eigenschappen van een lineaire ruimte R zijn gemakkelijk te bewijzen. De belangrijkste laten we hier en in (2.3) volgen.

Er is in R maar één nulelement mogelijk als in 4 aangegeven. Stel nl. o' voldoet ook aan eis 4. Dan is dus o'+x = x, dus voor x = o levert dit

$$o' + o = o.$$

Anderzijds is o + x = x, dus voor x = o' krijgen we

$$o + o' = o'.$$

Vanwege de commutativiteit (zie axioma 2) is echter

$$o' + o = o + o'.$$

Uit deze relaties volgt

$$o = o'.$$

Op dezelfde manier ziet men, dat een element x niet meer dan één tegengestelde -x heeft. Stel nl. dat

$$x + \bar{x} = o$$

voor zekere $\bar{x} \in R$. Dan is

$$\begin{aligned} -x = -x + o &= -x + (x+\bar{x}) \\ &= (-x+x) + \bar{x} \\ &= o + \bar{x} = \bar{x}. \end{aligned}$$

Ga zelf bij iedere stap in dit bewijs na, welke axioma's gebruikt worden. Algemener kan men voor a en b in R vragen naar de $x \in R$ die voldoen aan de vergelijking

$$a + x = b.$$

Door bij beide leden -a op te tellen, vinden we

$$\begin{aligned} b + (-a) &= (-a) + (a+x) \\ &= ((-a)+a) + x \\ &= o + x = x. \end{aligned}$$

Ga na dat $x = b + (-a)$ ook werkelijk een oplossing is. Het is blijkbaar de enige oplossing van $a+x = b$. We schrijven voortaan $b-a$ i.p.v. $b + (-a)$.

Uit de associatieve wet (axioma 3) kan men afleiden dat de som van n vectoren onafhankelijk is van de manier waarop men de termen groepeert en optelt, d.w.z. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ hangt niet af van de manier waarop men haakjes plaatst zodanig dat aangegeven wordt welk tweetal termen telkens bij elkaar opgeteld moet worden. Hoewel het bewijs niet moeilijk is -het gaat met volledige inductie-, laten we het achterwege omdat het vrij onoverzichtelijk en vervelend is. We geven alleen een voorbeeld met $n = 4$.

$$(x_1+x_2) + (x_3+x_4) = ((x_1+x_2) + x_3) + x_4$$
$$= (x_1 + (x_2+x_3)) + x_4.$$

Maar ook

$$(x_1+x_2) + (x_3+x_4) = x_1 + (x_2 + (x_3+x_4))$$
$$= x_1 + ((x_2+x_3) + x_4).$$

Hiermee is het aantal mogelijkheden voor $n = 4$ uitgeput; ga dit zelf na! Uit de commutativiteit (axioma 2) volgt dat het bij de optelling ook niet ter zake doet in welke volgorde men de termen plaatst. Ook dit kan men formeel met volledige inductie bewijzen, maar we laten het, om dezelfde reden als boven, achterwege. In plaats van $x_1 + x_2 + \ldots + x_s$ schrijven we $\sum_{i=1}^{s} x_i$.

(2.3) We bewijzen nu wat eigenschappen, waarbij ook de scalaire vermenigvuldiging een rol speelt. Uit

$$0.x = (0+0)x = 0.x + 0.x$$

volgt, dat

$$0x = o,$$

omdat de vergelijking $y + 0.x = 0.x$ als enige oplossing $y = o$ heeft. Hieruit leiden we verscheidene andere relaties af.

$$\lambda.o = \lambda(0.x) = (\lambda 0).x = 0.x = o.$$

$$\lambda x + (-\lambda)x = (\lambda+(-\lambda))x = 0.x = o,$$

dus $(-\lambda)x = -(\lambda x)$

$$\lambda x + \lambda(-x) = \lambda(x + (-x)) = \lambda.o = o,$$

dus $\lambda(-x) = -(\lambda x)$.

We schrijven voortaan $-\lambda x$ voor $-(\lambda x) = (-\lambda)x = \lambda(-x)$.

(2.4) Een belangrijk <u>voorbeeld</u> van een lineaire ruimte over k is de volgende ruimte, die we met k^n aanduiden (n een willekeurig natuurlijk getal). Vectoren in k^n zijn de rijtjes getallen $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ met alle $\xi_i \in k$. Optelling en scalaire vermenigvuldiging worden gedefinieerd door

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n)$$

$$\lambda(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_n).$$

We dienen nu de axioma's uit (2.1) te verifiëren. Axioma 1 en 6 zijn duidelijk. Axioma 2:

$$\begin{aligned}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) &= (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n)\\ &= (\eta_1+\xi_1, \eta_2+\xi_2, \ldots, \eta_n+\xi_n)\\ &= (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) + (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).\end{aligned}$$

Axioma 3 (associativiteit) gaat net zo. Als nulelement fungeert

$$o = (0, 0, \ldots, 0),$$

want

$$\begin{aligned}(0, 0, \ldots, 0) + (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) &= (0+\xi_1, 0+\xi_2, \ldots, 0+\xi_n)\\ &= (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).\end{aligned}$$

Verder is

$$-(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_n).$$

Ga dit zelf na! Axioma 7:

$$(\lambda+\mu)(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = ((\lambda+\mu)\xi_1,(\lambda+\mu)\xi_2,\ldots,(\lambda+\mu)\xi_n)$$
$$= (\lambda\xi_1+\mu\xi_1,\lambda\xi_2+\mu\xi_2,\ldots,\lambda\xi_n+\mu\xi_n)$$
$$= (\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\ldots,\lambda\xi_n) + (\mu\xi_1,\mu\xi_2,\ldots,\mu\xi_n)$$
$$= \lambda(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) + \mu(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n).$$

Analoog verifieert men de axioma's 8, 9 en 10.

We noemen k^n de <u>n-dimensionale rijtjesruimte</u> over k. Als $k = \mathbb{R}$, schrijven we wel $\mathbb{R}^n$ voor k^n, als $k = \mathbb{C}$, ook wel $\mathbb{C}^n$. In de vorige paragraaf hebben we ons in feite beziggehouden met $\mathbb{R}^2$, als we even afzien van lengte, hoek en inproduct in $\mathbb{E}^2$.

(2.5) Is R een lineaire ruimte, dan kan een deelverzameling S van R de eigenschap hebben, dat de som van elk tweetal elementen uit S en elk scalair veelvoud van een element van S weer tot S behoren. In dat geval is S zelf een lineaire ruimte. Precies gedefinieerd:

<u>DEFINITIE</u>. Een deelverzameling S van R heet een <u>lineaire deelruimte</u> (of kortweg <u>deelruimte</u>), als S <u>niet leeg</u> is en voldoet aan de volgende twee eisen:

a. Voor alle x en $y \in S$ is ook $x+y \in S$.

b. Voor alle $x \in S$ en $\lambda \in k$ is $\lambda x \in S$.

S voldoet aan alle axioma's voor een lineaire ruimte, zoals gegeven in (2.1), d.w.z. S is een lineaire ruimte. Voor de axioma's 1 t/m 3, en 6 t/m 10 is dit duidelijk (waarom?). Wat betreft axioma 4 (bestaan van een nulelement in S), als $x \in S$, dan is ook

$$o = 0.x \in S.$$

Axioma 5 (tegengestelde) ziet men als volgt in: is $x \in S$, dan is ook

$$-x = -(1.x) = (-1)x \in S.$$

Een voorbeeld van een lineaire deelruimte van R krijgt men aldus. Neem een vector $a \in R$ en definieer

$$< a > = \{\lambda a | \lambda \in k\},$$

de verzameling van alle scalaire veelvouden van a. Ga na dat $< a >$ aan de eisen voor een lineaire deelruimte voldoet. Voor $< o >$ schrijven we meestal o.

(2.6) Zijn S en T lineaire deelruimten van R, dan is $S \cap T$ er ook een. Immers, met x en y in $S \cap T$ zit x+y zowel in S als in T, dus in $S \cap T$, en hetzelfde geldt voor λx als $x \in S \cap T$ en $\lambda \in k$. Verder is $S \cap T$ niet leeg, want o behoort zowel tot S als tot T.

Een andere lineaire deelruimte krijgen we uit S en T op de volgende manier.

$$S+T = \{x+y | x \in S, y \in T\}.$$

S+T is niet leeg, want o = o+o zit erin. Eis a verifiëren we als volgt: stel z_1 en $z_2 \in S+T$. Dan

$$z_1 = x_1 + y_1 \text{ en } z_2 = x_2 + y_2 \text{ met } x_i \in S \text{ en } y_i \in T.$$

Dus $x_1 + x_2 \in S$ en $y_1 + y_2 \in T$, waaruit volgt:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in S+T.$$

Op eenzelfde manier laat men zien dat $\lambda z \in S+T$ voor $z \in S+T$ en $\lambda \in k$. Men noemt S+T de <u>som</u> van S en T.

S+T is een lineaire deelruimte van R, die S en T beide omvat, en het is de kleinste deelruimte met deze eigenschap. Preciezer gezegd: is U een deelruimte van R, die S en T omvat, dan omvat U ook S+T.

Is nl. $z \in S+T$, dan $z = x+y$ met $x \in S$, $y \in T$, dus $x \in U$ en $y \in U$, derhalve ook $z = x+y \in U$. Hiermee hebben we $S+T$ op een andere manier gekarakteriseerd. Evenzo is $S \cap T$ de grootste deelruimte van R, die in S en T bevat is (ga na!).

Analoog kan men inzien dat voor een willekeurig stel deelruimten S_i van R, waarbij i een (al of niet eindige) indexverzameling I doorloopt, $\bigcap_{i\in I} S_i$ een deelruimte van R is, evenals

$$\sum_{i\in I} S_i = \{z \in R \mid \exists\, i_1,\ldots,i_t \in I \text{ en } x_1 \in S_{i_1},\ldots,x_t \in S_{i_t} \text{ zodat } z = x_1 + \ldots + x_t\},$$

dat wil zeggen, $\sum_{i\in I} S_i$ bestaat uit alle mogelijke <u>eindige</u> sommen van vectoren uit de diverse deelruimten S_i. Men kan ook nu weer gemakkelijk inzien dat $\sum_{i\in I} S_i$ de kleinste deelruimte van R is die alle S_i, $i \in I$, omvat. Uit deze karakterisering volgt direct dat men met sommen van deelruimten commutatief en associatief kan rekenen; een analoge opmerking geldt natuurlijk voor doorsneden. Is $I = \{1,2,\ldots,t\}$, dan schrijven we vaak $S_1 + \ldots + S_t$ i.p.v. $\sum_{i\in I} S_i$.

(2.7) Zijn S en T deelruimten van een lineaire ruimte R, zodat $S \cap T = o$, dan noemen we $S+T$ ook wel de <u>directe som</u> van S en T. Notatie: $S \oplus T$. In deze situatie is iedere vector z van $S \oplus T$ op precies één manier te schrijven als som van een vector uit S en een vector uit T. Stel nl. dat voor $z \in S \oplus T$,

$$z = x+y = x'+y' \text{ met } x,x' \in S \text{ en } y,y' \in T.$$

Dan is

$$x-x' = y'-y.$$

Daar het linkerlid van deze laatste relatie in S zit en het rechterlid in T, is dus

$$x-x' = y'-y \in S \cap T = o,$$

dus $x-x' = y'-y = o$, d.w.z. $x = x'$ en $y = y'$. Heeft omgekeerd de som van $S+T$ van twee deelruimten de eigenschap dat iedere $z \in S+T$ op precies één manier te schrijven is als $z = x+y$ met $x \in S$ en $y \in T$, dan is $S \cap T = o$, d.w.z. de som is direct. Want is $x \in S \cap T$, dan is

$$x = x+o \text{ met } x \in S \text{ en } o \in T,$$

maar ook

$$x = o+x \text{ met } o \in S \text{ en } x \in T,$$

dus wegens de geëiste uniciteit is $x = o$.

Analoog heet $\sum_{i\in I} S_i$ (S_i deelruimte van R) een <u>directe som</u>, als voor alle $i \in I$ geldt:

$$S_i \cap \sum_{j\in I, j\neq i} S_j = o.$$

Equivalent hiermee is de eis: iedere $z \in \sum_{i\in I} S_i$ is op precies één manier te schrijven als een eindige som

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_t,$$

met $x_1 \in S_{i_1}$, $x_2 \in S_{i_2}, \ldots, x_t \in S_{i_t}$ voor zekere (verschillende) indices $i_1, i_2, \ldots, i_t \in I$. Notatie: $\bigoplus_{i\in I} S_i$ of $S_1 \oplus \ldots \oplus S_t$ als $I = \{1,\ldots,t\}$.

(2.8) <u>DEFINITIE</u>. Zijn $x_1, \ldots, x_s$ vectoren uit R, dan heet $x \in R$ <u>lineair afhankelijk van</u> (of een <u>lineaire combinatie van</u>) $x_1, \ldots, x_s$, wanneer

$$x \in \langle x_1 \rangle + \ldots + \langle x_s \rangle,$$

m.a.w., als er $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in k$ bestaan zodat

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s.$$

Voor een (niet noodzakelijk eindig) stel vectoren x_i, $i \in I$, uit R heet x afhankelijk van de x_i, als x afhankelijk is van een eindig aantal ervan, m.a.w. als

$$x \in \sum_{i \in I} < x_i >.$$

De lineaire deelruimte $< x_1 > + \ldots + < x_s >$ van R heet de deelruimte opgespannen (of voortgebracht) door $x_1, \ldots, x_s$; hij bestaat precies uit alle lineaire combinaties van $x_1, \ldots, x_s$. De vectoren $x_1, \ldots, x_s$ noemen we voortbrengenden van de deelruimte $< x_1 > + \ldots + < x_s >$. Analoog bij oneindig veel vectoren.

(2.9) Een eindig stel vectoren $x_1, \ldots, x_s$ uit R heet lineair afhankelijk als er $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in k$ bestaan, niet allemaal nul, zodat

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s = o.$$

$x_1, \ldots, x_s$ heten lineair onafhankelijk, wanneer ze niet lineair afhankelijk zijn, m.a.w. als de relatie

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s = o$$

alleen kan gelden voor $\lambda_1 = \ldots = \lambda_s = 0$.

Een oneindig stel vectoren heet lineair afhankelijk als er een eindig aantal lineair afhankelijke vectoren tussen zit. Een oneindig stel vectoren heet lineair onafhankelijk, als ze niet lineair afhankelijk zijn, d.w.z. als elke eindige deelcollectie lineair onafhankelijk is.

Stel $x_1, \ldots, x_s$ zijn lineair afhankelijk. Dan is er dus een relatie

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s = o,$$

waarin niet alle $\lambda_i = 0$ zijn, zeg $\lambda_j \neq 0$. Dan is

$$x_j = -\lambda_j^{-1}\lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_j^{-1}\lambda_{j-1}x_{j-1} - \lambda_j^{-1}\lambda_{j+1}x_{j+1} - \ldots - \lambda_j^{-1}\lambda_s x_s,$$

d.w.z., x_j is lineair afhankelijk van $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_s$. Is omgekeerd dit laatste het geval, d.w.z.

$$x_j = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{j-1}x_{j-1} + \alpha_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \alpha_s x_s,$$

dan is

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{j-1}x_{j-1} + (-1)x_j + \alpha_{j+1}x_{j+1} + \ldots + \alpha_s x_s = o.$$

In deze relatie is de coëfficient van x_j niet nul, dus $x_1,\ldots,x_s$ zijn lineair afhankelijk. Voor oneindig veel vectoren gelden analoge uitspraken; deze volgen direct uit het hier behandelde eindige geval.

Zijn $x_1,\ldots,x_s$ lineair afhankelijk, maar $x_1,\ldots,x_{s-1}$ lineair onafhankelijk, dan is in de relatie

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{s-1}x_{s-1} + \lambda_s x_s = o,\ \lambda_i \in k, \text{ niet alle } \lambda_i = 0,$$

noodzakelijk $\lambda_s \neq 0$, omdat $\lambda_s = 0$ zou betekenen dat $x_1,\ldots,x_{s-1}$ lineair afhankelijk waren. Dan is dus x_s een lineaire combinatie van $x_1,\ldots,x_{s-1}$, nl.

$$x_s = -\lambda_s^{-1}\lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_s^{-1}\lambda_{s-1}x_{s-1}.$$

Daarmee is bewezen:

STELLING. Een (eindig of oneindig) stel vectoren is lineair afhankelijk dan en slechts dan als minstens één van die vectoren lineair afhankelijk is van de andere. Zijn $x_1,\ldots,x_{s-1},x_s$ lineair afhankelijk en $x_1,\ldots,x_{s-1}$ lineair onafhankelijk, dan is x_s lineair afhankelijk van $x_1,\ldots,x_{s-1}$.

Let op, in het algemeen geldt niet dat elke x_i afhankelijk is van de andere vectoren, als $x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_s$ lineair afhankelijk zijn; we weten slechts dat minstens één van de x_i afhankelijk is van de rest.

(2.10) DEFINITIE. Een stel vectoren e_i, $i \in I$, in een lineaire ruimte R heet een basis van R, als

1. R wordt <u>opgespannen</u> door de e_i, $i \in I$, d.w.z. iedere $x \in R$ is lineaire combinatie van (een eindig aantal van) de e_i.
2. De e_i, $i \in I$, zijn <u>lineair onafhankelijk</u>.

$R = \sum_{i \in I} \langle e_i \rangle$

Als een lineaire ruimte R een basis heeft, is die niet eenduidig bepaald. Is bijvoorbeeld $e_1, e_2, \ldots, e_n$ een basis, dan is ook $e_1 + e_2, e_2, \ldots, e_n$ een basis; bewijs dit zelf. We zullen echter zien dat het <u>aantal</u> elementen van een basis wél vastligt; dit noemen we dan de dimensie van R.

<u>STELLING. Wordt een lineaire ruimte $R \neq o$ voortgebracht door eindig veel vectoren $a_1, \ldots, a_n$, dan heeft R een basis van ten hoogste n vectoren</u>.

<u>Bewijs</u>. Zijn $a_1, \ldots, a_n$ lineair onafhankelijk, dan vormen ze een basis. Als ze lineair afhankelijk zijn, is één ervan afhankelijk van de rest; na eventueel hernummeren mogen we aannemen, dat a_n afhankelijk is van $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Dan is dus

$$\langle a_n \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle + \ldots + \langle a_{n-1} \rangle,$$

dus $R = \langle a_1 \rangle + \ldots + \langle a_{n-1} \rangle$,

d.w.z. R wordt al door $a_1, \ldots, a_{n-1}$ voortgebracht. Herhaal nu bovenstaande procedure. Na eindig veel stappen komen we uit bij een stel lineair onafhankelijke voortbrengenden van R.

Zonder bewijs vermelden we de volgende stelling.

<u>STELLING. Iedere lineaire ruimte heeft een (niet noodzakelijk eindige) basis</u>.

Over het bewijs merken we alleen het volgende op. Heeft R aftelbaar veel voortbrengenden, dan kan men daaruit door volledige inductie een basis selecteren, als in het bewijs van de vorige stelling, dus dan heeft R een eindige of aftelbaar oneindige basis. Is R niet aftelbaar voortgebracht, dan heeft men een vervanging van het principe van volledige inductie nodig voor niet aftelbare verzamelingen, het zogenaamde lemma van Zorn.

(2.11) Voor we de belangrijkste resultaten van deze sectie bewijzen, eerst een hulpstelling.

LEMMA. Stel $x_1,\ldots,x_s \in R$, $s > 1$, en definieer $y_i = x_i$ voor $i = 1,\ldots,s-1$ en $y_s = x_s + \lambda x_1$ met $\lambda \in k$. Dan geldt: $x_1,\ldots,x_s$ zijn lineair onafhankelijk dan en slechts dan als $y_1,\ldots,y_s$ het zijn.

Bewijs. Stel $x_1,\ldots,x_s$ zijn lineair onafhankelijk. Neem aan, er is een relatie

$$\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_s y_s = o.$$

Dan is dus, wegens de definitie van de y_i,

$$(\lambda_1 + \lambda\lambda_s)x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_s x_s = o.$$

Vanwege de onafhankelijkheid van $x_1,\ldots,x_s$, is dus

$$\lambda_1 + \lambda\lambda_s = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0,$$

dus moeten alle $\lambda_i = 0$ zijn, d.w.z. $y_1,\ldots,y_s$ zijn lineair onafhankelijk.

Aangezien $x_s = y_s - \lambda y_1$, kunnen we bovenstaande redenering houden met verwisseling van de x_i en de y_i. D.w.z. onafhankelijkheid van de y_i impliceert onafhankelijkheid van de x_i.

STELLING. Heeft R een basis van n vectoren, dan is elk stel van méér dan n vectoren in R lineair afhankelijk.

Bewijs. Laat $e_1,\ldots,e_n$ een basis van R zijn, en beschouw s vectoren $x_1,\ldots,x_s$ met $s > n$. Als n+1 daarvan lineair afhankelijk zijn, dan zijn ook $x_1,\ldots,x_s$ lineair afhankelijk (waarom?). Dus is het voldoende, het geval $s = n+1$ te beschouwen.
We voeren het bewijs met volledige inductie naar n. Voor $n = 1$ is het duidelijk: $x_1 = \alpha_1 e_1$, $x_2 = \alpha_2 e_1$, dus voor $\alpha_1 \neq o$ is $x_2 = \alpha_1^{-1}\alpha_2 x_1$, en voor $\alpha_1 = 0$ is $x_1 = o = 0.x_2$. Stel, het resultaat is bewezen voor elke ruimte met een basis van n-1 vectoren, $n > 1$. Druk nu $x_1,\ldots,x_{n+1}$ uit in de basis $e_1,\ldots,e_n$.

$$x_1 = \lambda_{1,1}e_1 + \lambda_{1,2}e_2 + \ldots + \lambda_{1,n}e_n$$
$$x_2 = \lambda_{2,1}e_1 + \lambda_{2,2}e_2 + \ldots + \lambda_{2,n}e_n$$
$$\text{----------}$$
$$x_{n+1} = \lambda_{n+1,1}e_1 + \lambda_{n+1,2}e_2 + \ldots + \lambda_{n+1,n}e_n.$$

Als $x_1 = o$, zijn $x_1,\ldots,x_{n+1}$ afhankelijk. Neem dus aan dat $x_1 \neq o$. Dan is één van de $\lambda_{1,j} \neq 0$; na eventueel hernummeren van de basisvectoren mogen we aannemen dat $\lambda_{1,n} \neq 0$. Beschouw nu de vectoren

$$y_1 = x_1,\ y_j = x_j - \lambda_{1,n}^{-1}\lambda_{j,n}x_1 \text{ voor } j = 2,\ldots,n+1.$$

De vectoren $y_2,\ldots,y_{n+1}$ zitten in de deelruimte S van R opgespannen door $e_1,\ldots,e_{n-1}$. Aangezien $e_1,\ldots,e_{n-1}$ een basis van S vormen, levert de inductieveronderstelling dat $y_2,\ldots,y_{n+1}$ en dus ook $y_1,y_2,\ldots,y_{n+1}$ lineair afhankelijk zijn. Herhaalde toepassing van bovenstaand lemma levert dan dat $x_1,\ldots,x_{n+1}$ ook lineair afhankelijk moeten zijn.

(2.12) Een direct gevolg van voorgaande stelling is:

STELLING. Heeft R een basis van n vectoren, dan heeft elke basis in R precies n vectoren.

Bewijs. Stel $e_1,\ldots,e_n$ is een basis van R, en er is ook een basis van s vectoren, zeg $f_1,\ldots,f_s$. $s > n$ kan niet, wegens stelling (2.11). Toepassing van (2.11) op de basis $f_1,\ldots,f_s$ laat ons zien dat $n > s$ ook uitgesloten is. Blijft slechts $s = n$ over.

DEFINITIE. Heeft R een basis van n vectoren, dan heet n de dimensie van R. R heet in dat geval n-dimensionaal, of eindig-dimensionaal als we n niet nader willen specificeren. Heeft R geen eindige basis, dan heet hij oneindig-dimensionaal.

(2.13) Als laatste stelling over bases in eindig-dimensionale lineaire ruimten bewijzen we:

STELLING. Stel R heeft een basis $e_1,\ldots,e_n$ en $f_1,\ldots,f_s$ zijn lineair onafhankelijk in R. Dan kunnen we n-s vectoren kiezen uit de rij $e_1,\ldots,e_n$, die samen met $f_1,\ldots,f_s$ een basis vormen.

Bewijs. Beschouw de verzameling $V = \{f_1,\ldots,f_s,e_1,\ldots,e_n\}$. Kies uit V een maximale deelverzameling W van lineair onafhankelijke vectoren, die $f_1,\ldots,f_s$ bevat. Voor $1 \leqslant i \leqslant n$ en $e_i \notin W$ is $W \cup \{e_i\}$ een stel lineair afhankelijke vectoren, vanwege de maximaliteit van W, terwijl W uit lineair onafhankelijke vectoren bestaat, dus stelling (2.9) zegt dat e_i afhankelijk is van de vectoren uit W. Dit houdt in dat de vectoren uit W de ruimte R opspannen, dus een basis ervan vormen.

(2.14) We keren terug tot de rijtjesruimte k^n uit (2.4). Een basis daarvan wordt gevormd door de vectoren

$e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,0,\ldots,0,1)$.

Waarom is dit een basis? We noemen dit de <u>standaardbasis</u> van k^n. k^n is dus n-dimensionaal!

(2.15) Een <u>voorbeeld</u> van een oneindig-dimensionale lineaire ruimte krijgen we als volgt. Zij k^∞ de ruimte van de oneindige rijtjes $(\xi_1,\xi_2,\ldots)$, met alle $\xi_i \in k$ en zó dat er voor elk rijtje slechts eindig veel waarden van i zijn waarvoor $\xi_i \neq 0$. Optelling en scalaire vermenigvuldiging definiëren we weer coördinaatsgewijs:

$$(\xi_1,\xi_2,\ldots) + (\eta_1,\eta_2,\ldots) = (\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\ldots)$$

$$\lambda(\xi_1,\xi_2,\ldots) = (\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\ldots).$$

Ga na dat k^∞ een lineaire ruimte is. Bewijs ook dat de vectoren $e_1 = (1,0,\ldots,0,\ldots)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0,\ldots),\ldots$ een basis van k^∞ vormen. Dus k^∞ heeft aftelbaar oneindige dimensie.

(2.16) Nog een <u>voorbeeld</u> van een oneindig-dimensionale lineaire ruimte. We beschouwen alle reële functies op de reële rechte gedefinieerd. Optelling en scalaire vermenigvuldiging met elementen van $\mathbb{R}$ definiëren we door

$f+g$ is de functie met $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, voor alle x

λf " " " " $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, voor alle x.

Nulelement is de functie die in alle punten de waarde 0 aanneemt: $o(x) = 0$ voor alle x. Beschouw nu de functies f_i, $i = 1,2,\ldots$, met

$f_i(x) = x^i$.

Een eindige lineaire combinatie hiervan ziet er uit als

$$(\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n)(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n.$$

Aangezien een veelterm ten hoogste eindig veel nulpunten kan hebben, tenzij al z'n coëfficienten nul zijn, zien we: een eindige lineaire combinatie van de functies $f_1, f_2, \ldots$ kan alleen nul zijn, als alle coëfficienten nul zijn. Oftewel: $f_1, f_2, \ldots$ zijn lineair onafhankelijk. Dus de ruimte is zeker oneindig-dimensionaal. Let op: de f_i vormen nog geen basis!

Dit voorbeeld kan op alle mogelijke manieren gevarieerd worden: met continue functies, één of meer keer differentieerbare functies, complexe functies, dit alles op allerlei verzamelingen.

§3. LINEAIRE AFBEELDINGEN.

Een typisch trekje van de moderne wiskunde is, dat men niet alleen bepaalde structuren beschouwt, maar ook de afbeeldingen die deze structuren invariant laten. Als zodanig zijn de lineaire afbeeldingen, waar we ons nu mee bezig willen houden, het logisch vervolg op de lineaire ruimten die we in de vorige paragraaf geïntroduceerd hebben. Maar er zijn andere, in feite veel belangrijker, redenen om lineaire afbeeldingen te beschouwen. Eén daarvan is, dat ze een soort "eerste orde benadering" van een grote klasse van afbeeldingen vormen, zoals lineaire functies een benadering van, bijvoorbeeld, machtreeksen vormen. Een andere belangrijke reden is: ze zijn gemakkelijk te hanteren, je kunt er mee rekenen. Als gevolg daarvan vinden ze talloze toepassingen in alle mogelijke problemen, in en buiten de wiskunde.

(3.1) DEFINITIE. Zijn R en S lineaire ruimten over k, dan heet de afbeelding $A : R \to S$ een lineaire afbeelding (over k), wanneer geldt:

1. $A(x+y) = Ax + Ay$, voor alle x en $y \in R$.
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$, voor alle $x \in R$ en $\lambda \in k$.

Al naar gelang $k = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, spreken we wel van een reële resp. complexe lineaire afbeelding. Enige voorbeelden van lineaire afbeeldingen: 1) de identieke afbeelding $R \to R$, d.w.z. de afbeelding met $x \mapsto x$ voor alle $x \in R$; 2) de nulafbeelding $R \to S$ met $x \mapsto 0$ voor alle $x \in R$; 3) de afbeelding $A : k^2 \to k^2$ met $A(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 + 2\xi_2, 3\xi_1 - \xi_2)$. Controleer zelf, in al deze gevallen met een lineaire afbeelding van doen te hebben.

Is $A : R \to S$ een lineaire afbeelding en R' een lineaire deelruimte van R, dan is de restrictie van A tot R', $A|R' : R' \to S$ ook een lineaire afbeelding; ga na. Een lineaire afbeelding $A : R \to k = k^1$ heet een <u>lineaire functie</u> of een <u>functionaal</u> op R.

Bewijs zelf: Zijn $B : R \to S$ en $A : S \to T$ lineaire afbeeldingen, dan is ook $AB : R \to T$ een lineaire afbeelding. AB heet de <u>compositie</u> of het <u>product</u> van A en B. Men schrijft ook wel $A \circ B$ i.p.v. AB.

(3.2) Onder het <u>beeld</u> van een lineaire afbeelding $A : R \to S$ verstaan we, in overeenstemming met de algemene definitie van beeld, de verzameling van alle vectoren uit S die beeld zijn van een vector uit R:

$$AR = \{Ax \in S \mid x \in R\}.$$

<u>STELLING. Het beeld van een lineaire afbeelding $A : R \to S$ is een lineaire deelruimte van S. Algemener, is R' een deelruimte van R, dan is AR' een lineaire deelruimte van S.</u>

<u>Bewijs</u>. Zijn u en $v \in AR$, dan bestaan er x en $y \in R$ met $Ax = u$, $Ay = v$. Dan is

$$u+v = Ax+Ay = A(x+y) \in AR,$$

$$\lambda u = \lambda Ax = A(\lambda x) \in AR.$$

Verder is AR niet leeg, omdat R niet leeg is, dus AR is een lineaire deelruimte. Analoog voor de tweede bewering.

(3.3) <u>DEFINITIE</u>. Een lineaire afbeelding $A : R \to S$ heet een (<u>lineair</u>) <u>isomorfisme</u>, als er een inverse lineaire afbeelding $A^{-1} : S \to R$ bestaat. R en S heten dan <u>isomorfe</u> lineaire ruimten.

Zoals bekend, is een afbeelding die een inverse heeft, noodzakelijk 1-1 en op (oftewel: bijectief). Stel omgekeerd $A : R \to S$ is een bijectieve lineaire afbeelding. A heeft dan een inverse afbeelding $A^{-1} : S \to R$. We laten nu zien, dat A^{-1} noodzakelijk lineair is. Stel u en $v \in S$. Er bestaan x en $y \in R$ met $Ax = u$, $Ay = v$. Uit

$$A(x+y) = Ax + Ay = u+v$$

volgt

$$A^{-1}(u+v) = x+y = A^{-1}u + A^{-1}v.$$

Uit $A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda u$ volgt evenzo $A^{-1}(\lambda u) = \lambda x = \lambda A^{-1}u$.

Stel nu, $A : R \to S$ is een isomorfisme. Zijn $x_1, \ldots, x_s$ lineair onafhankelijk in R, dan geldt hetzelfde voor $Ax_1, \ldots, Ax_s$ in S. Want waren $Ax_1, \ldots, Ax_s$ lineair afhankelijk, dan waren ook $x_1 = A^{-1}Ax_1, \ldots, x_s = A^{-1}Ax_s$ lineair afhankelijk, in tegenspraak met de veronderstelling. Een isomorfisme A voert dus een basis van R in een basis van S over; bijgevolg hebben R en S dezelfde dimensie.

Stel omgekeerd, R en S hebben dezelfde <u>eindige</u> dimensie. Is de lineaire afbeelding $A : R \to S$ 1-1, dan voert hij onafhankelijke vectoren in onafhankelijke vectoren over. Stel nl. $x_1, \ldots, x_s$ onafhankelijk in R. Uit

$$\lambda_1 Ax_1 + \ldots + \lambda_s Ax_s = 0$$

volgt $A(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s) = 0$, dus $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_s x_s = 0$, waaruit volgt dat alle $\lambda_i = 0$. Een basis $e_1, \ldots, e_n$ van R gaat dus over in een n-tal onafhankelijke vectoren $Ae_1, \ldots, Ae_n$ in S. Omdat dim S = n, vormen laatstgenoemde vectoren een basis van S. Dus A is een afbeelding <u>op</u>. Is omgekeerd A een lineaire afbeelding van R op S, dan gaat een basis $e_1, \ldots, e_n$ van R noodzakelijk over in een stelsel voortbrengenden $Ae_1, \ldots, Ae_n$ van S,

die wegens dim S = n lineair onafhankelijk moeten zijn. We vatten de bewezen resultaten samen in de volgende

STELLING. Zij A : R → S een lineaire afbeelding. Dan geldt:
(i) A is een isomorfisme dan en slechts dan als A 1-1 en op is.
(ii) Isomorfe ruimten hebben dezelfde dimensie.
(iii) Is dim R = dim S eindig, dan is A dan en slechts dan 1-1 als hij op is.

Let op: de eis van eindigheid van de dimensies kan bij (iii) beslist niet gemist worden.

Als B : R → S en A : S → T beide 1-1 en op zijn, dan is dat ook het geval met AB. Wat is dan de inverse van AB? Stel $x \in R$, $y = ABx$. Dan is

$$A^{-1}y = A^{-1}ABx = Bx$$

$$x = B^{-1}A^{-1}y.$$

Dus $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. In het algemeen is dus niet $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. Trouwens, als R, S en T drie verschillende lineaire ruimten zijn, dan is $A^{-1}B^{-1}$ niet eens gedefinieerd; ga na!

IN DE REST VAN DEZE PARAGRAAF BESCHOUWEN WE UITSLUITEND LINEAIRE AFBEELDINGEN TUSSEN RUIMTEN VAN EINDIGE DIMENSIE.

(3.4) Stel R is een lineaire ruimte van dimensie n. We kiezen een basis $e_1, \ldots, e_n$. Definieer de afbeelding

$$T : R \to k^n$$

door

$$T(\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Men rekent zonder moeite na dat T lineair is; verder is hij 1-1 en op. T is dus een lineair isomorfisme, dat we de coördinatiseringsafbeelding van R t.o.v. de basis $e_1,\ldots,e_n$ noemen. Het is duidelijk dat een andere keuze van basis in R ook een andere T geeft.

(3.4) Beschouw een lineaire afbeelding $A : R \to S$ en neem een basis $e_1,\ldots,e_r$ in R en $f_1,\ldots,f_s$ in S. Stel we kennen de beelden van de basisvectoren $e_1,\ldots,e_r$:

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij} f_i, \text{ met } \alpha_{ij} \in k.$$

Van iedere vector $x \in R$ ligt dan het beeld onder A vast, want als

$$x = \sum_{j=1}^{r} \xi_j e_j,$$

dan is

$$Ax = \sum_{j=1}^{r} \xi_j Ae_j, \text{ wegens de lineariteit,}$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij} \xi_j f_i,$$

dus

$$Ax = \sum_{i=1}^{s} \eta_i f_i$$

met

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} \xi_j.$$

Kennen we de coëfficienten α_{ij}, dan kunnen we daarmee dus A in coördinaten beschrijven.

DEFINITIE. Het schema van coëfficienten α_{ij}:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \ldots & \alpha_{sr} \end{pmatrix}$$

noemen we de matrix van de lineaire afbeelding A, t.o.v. de bases $e_1,\ldots,e_r$ en $f_1,\ldots,f_s$ van R resp. S. Algemeen noemen we een dergelijke schema van getallen een s × r-matrix, of kortweg een matrix. De horizontale regel

$$\alpha_{i1}\ \alpha_{i2}\ \cdots\ \alpha_{ir}$$

heet de i-de rij van de matrix, de verticale regel

$$\begin{matrix}\alpha_{1j}\\ \alpha_{2j}\\ \vdots\\ \alpha_{sj}\end{matrix}$$

de j-de kolom. α_{ij} noemen we de i,j-de coëfficient, of de coëfficient op de i,j-de plaats in de matrix. We duiden de matrix ook wel aan als: $(\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,s\\ j=1,\ldots,r}}$, of: (α_{ij}).

De matrix van $A : R \to S$ hangt af van de bases die we in R en S gekozen hebben. We zullen de situatie nog iets anders omschrijven. De basis $e_1,\ldots,e_r$ bepaalt een lineair isomorfisme $T : R \to k^r$ met

$$T(\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_r e_r) = (\xi_1,\ldots,\xi_r).$$

Evenzo bepaalt $f_1,\ldots,f_s$ een lineair isomorfisme $U : S \to k^s$ met

$$U(\eta_1 f_1 + \ldots + \eta_s f_s) = (\eta_1,\ldots,\eta_s).$$

Beschouw de lineaire afbeelding

$$A_0 = UAT^{-1} : k^r \to k^s.$$

Op de standaardbasis van k^r werkt deze als volgt:

$$\begin{aligned} A_0(\underbrace{0,\ldots,0,1}_{j},0,\ldots,0) &= UAe_j \\ &= \sum_{i=1}^{s} \alpha_{ij} Uf_i \\ &= (\alpha_{1j},\alpha_{2j},\ldots,\alpha_{sj}). \end{aligned}$$

We zien dus: het beeld van de j-de standaardbasisvector in k^r onder $A_0 = UAT^{-1}$ is precies de j-de kolom van de matrix van A (t.o.v. de gegeven bases).

Voor $x = (\xi_1,\ldots,\xi_r) \in k^r$ is

$A_0 x = \xi_1(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{s1}) + \xi_2(\alpha_{12},\ldots,\alpha_{s2}) + \ldots + \xi_r(\alpha_{1r},\ldots,\alpha_{sr})$.

Dus $A_0 x$ is een lineaire combinatie van de kolommen van de matrix van A, met als coëfficienten de coördinaten van x.

Schrijven we $A_0 \quad x = (\eta_1,\ldots,\eta_s)$, dan kunnen we de coördinaten $\eta_1,\ldots,\eta_s$ als volgt berekenen:

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1r}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2r}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \ldots & \alpha_{sr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_r\end{pmatrix},$$

waarbij we η_i krijgen door de coëfficienten van de i-de rij van de matrix stuk voor stuk met de opeenvolgende coördinaten $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r$ te vermenigvuldigen, en dan de zaak op te tellen:

$$\eta_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{ir}\xi_r.$$

(α_{ij}) is dus ook de matrix van A_0. Als we afspreken, de matrix van een lineaire afbeelding van k^r in k^s steeds t.o.v. de twee standaardbases te nemen, dan is er een 1-1 verband tussen lineaire afbeeldingen $k^r \to k^s$ en s × r-matrices. We zullen verder A_0 met (α_{ij}) identificeren. Indien de bases $e_1,\ldots,e_r$ in R en $f_1,\ldots,f_s$ in S vast gekozen zijn, en er geen verwarring dreigt, noemen we (α_{ij}) wel "de" matrix van A, en noteren ook vaak $A = (\alpha_{ij})$. Strikt genomen is dus $A_0 = (\alpha_{ij})$.

Is A een lineaire transformatie van een ruimte R in zichzelf, dan drukt men origineelvector en beeldvector vrijwel altijd in dezelfde basis uit. A wordt in dat geval beschreven door een vierkante matrix, d.i. een matrix met evenveel rijen

als kolommen. In het bijzonder wordt de identiteit $I : R \to R$ t.o.v. elke basis van R beschreven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die we de <u>eenheidsmatrix</u> noemen. We zullen later onderzoeken, hoe de matrix van een lineaire transformatie van een ruimte in zichzelf verandert bij overgang op een andere basis.

(3.5) Zijn A en B lineaire afbeeldingen: $R \to S$, dan is hun <u>som</u> de lineaire afbeelding $R \to S$ gedefinieerd door

$$(A+B)x = Ax + Bx, \text{ voor alle } x \in R.$$

Ga na, dat dit inderdaad een lineaire afbeelding is. Kies in R een basis $e_1, \ldots, e_r$, in S een basis $f_1, \ldots, f_s$. Laat A de matrix (α_{ij}) hebben, B de matrix (β_{ij}). Wat is de matrix van A+B ?

$$\begin{aligned} (A+B)e_j &= Ae_j + Be_j \\ &= \sum_i \alpha_{ij} f_i + \sum_i \beta_{ij} f_i \\ &= \sum_i (\alpha_{ij}+\beta_{ij}) f_i. \end{aligned}$$

Blijkbaar is dus de matrix van A+B gelijk aan (γ_{ij}) met

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}, \text{ voor alle } i,j \ (1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant r).$$

Evenzo beschouwen we, voor $\lambda \in K$, de lineaire afbeelding $\lambda A : R \to S$ gedefinieerd door

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax), \text{ voor alle } x \in R.$$

Dan is

$$(\lambda A)e_j = \lambda(Ae_j) = \lambda \sum_i \alpha_{ij} f_i = \sum_i \lambda \alpha_{ij} f_i.$$

Dus λA heeft als matrix (γ_{ij}) met

$$\gamma_{ij} = \lambda\alpha_{ij} \text{ voor alle } i \text{ en } j \quad (1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant r).$$

We willen nu het product van twee lineaire afbeeldingen $B : R \to S$ en $A : S \to T$ onderzoeken. In R,S en T kiezen we bases $e_1,\ldots,e_r$, resp. $f_1,\ldots,f_s$, resp. $g_1,\ldots,g_t$. Laat A de matrix (α_{ij}) hebben en B de matrix (β_{ij}). Dan is

$$\begin{aligned} ABe_j &= A(\sum_{k=1}^{s} \beta_{kj} f_k) \\ &= \sum_{k=1}^{s} \beta_{kj} Af_k \\ &= \sum_{k=1}^{s} \beta_{kj} \sum_{i=1}^{t} \alpha_{ik} g_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} (\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kj}) g_i. \end{aligned}$$

Dus als (γ_{ij}) de matrix van AB is, dan is

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kj} \quad (1 \leqslant i \leqslant t,\ 1 \leqslant j \leqslant r).$$

Bovenstaande resultaten maken de volgende definitie voor de hand liggend.

DEFINITIE. Zijn (α_{ij}) en (β_{ij}) twee $s \times r$-matrices, dan is hun som gedefinieerd door coëfficientsgewijseoptellen:

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij}+\beta_{ij}).$$

Voor $\lambda \in k$ is $\lambda(\alpha_{ij})$ gedefinieerd door coëfficientsgewijze vermenigvuldiging met λ:

$$\lambda(\alpha_{ij}) = (\lambda\alpha_{ij}).$$

Is (α_{ij}) een $t \times s$-matrix en (β_{ij}) een $s \times r$-matrix, dan is hun product

$$(\gamma_{ij}) = (\alpha_{ij})(\beta_{ij})$$

de $t \times r$-matrix met

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kj},$$

d.w.z., de i,j-de coëfficient van de productmatrix krijgt men door de coëfficienten van de i-de rij van (α_{ij}) achtereenvolgens te vermenigvuldigen met de opeenvolgende coëfficienten van de j-de kolom van (β_{ij}) en dan deze producten op te tellen.

Bovenstaande berekeningen kunnen we, in het licht van deze definitie, samenvatten in de volgende

STELLING. De matrix van de som van twee lineaire afbeeldingen: $R \to S$ is de som van hun respectieve matrices, de matrix van het λ-voud van een lineaire afbeelding is het λ-voud van zijn matrix, en de matrix van het product van twee lineaire afbeeldingen: $R \to S$ en $S \to T$, is het product van de twee matrices.

(3.6) Beschouw nu een bijectieve lineaire afbeelding $A : R \to S$. Zoals we in (3.3) gezien hebben, is A een isomorfisme, d.w.z. A heeft een lineaire afbeelding A^{-1} als inverse, en de dimensies van R en S zijn in dit geval gelijk, zeg n. A en A^{-1} worden derhalve door $n \times n$-matrices voorgesteld, na keuze van bases in R en S. Laat A de matrix (α_{ij}), A^{-1} de matrix (β_{ij}) hebben. Uit

$$AA^{-1} = I_S, \text{ de identiteit op S,}$$

volgt dat

$$(\alpha_{ij})(\beta_{ij}) = (\delta_{ij})$$

waarin (δ_{ij}) de eenheidsmatrix voorstelt:

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anders gezegd:

$\delta_{ij} = 1$ als $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$.

δ_{ij} heet het Kronecker-symbool.

De coëfficienten β_{ij} kunnen we nu in principe berekenen uit het stelsel van n^2 lineaire vergelijkingen in n^2 onbekenden:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj} = \delta_{ij},\ 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

(Eigenlijk staan hier n stelsels van elk n vergelijkingen in n onbekenden; ga na!). Maar het oplossen van dergelijke stelsels is een probleem dat we nog niet algemeen onderzocht hebben. We volstaan er daarom op dit moment mee, ter illustratie de gevallen n = 1 en 2 te behandelen; het algemene geval zal in (5.9) aan de orde komen.

n = 1. Dan $A = (\alpha_{11})$, en het is duidelijk dat $A^{-1} = (\alpha_{11}^{-1})$.

n = 2. $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ en $A^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$

A^{-1} berekent men uit de vergelijkingen

$$\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} = 1 \qquad \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} = 0$$

$$\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} = 0 \qquad \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} = 1.$$

Op deze twee stelsels van elk twee lineaire vergelijkingen passen we de bekende eliminatiemethode van Gauss toe.

$$\alpha_{11}\alpha_{22}\beta_{11} + \alpha_{12}\alpha_{22}\beta_{21} = \alpha_{22} \qquad \alpha_{11}\alpha_{22}\beta_{12} + \alpha_{12}\alpha_{22}\beta_{22} = 0$$

$$\underline{\alpha_{12}\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{12}\alpha_{22}\beta_{21} = 0} \qquad \underline{\alpha_{12}\alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{12}\alpha_{22}\beta_{22} = \alpha_{12}}$$

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\beta_{11} = \alpha_{22} \qquad (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\beta_{12} = -\alpha_{12}$$

Men rekent nu verder zonder veel moeite na: als $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$, dan is er precies één oplossing voor de β_{ij}, te weten

$$\beta_{11} = (\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})^{-1}\alpha_{22} \qquad \beta_{12} = -(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})^{-1}\alpha_{12}$$

$$\beta_{21} = -(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})^{-1}\alpha_{21} \qquad \beta_{22} = (\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})^{-1}\alpha_{11}.$$

Kan er een oplossing voor A^{-1} zijn als $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21} = 0$? Stel dat die inderdaad bestond. Uit

$$(\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})\beta_{11} = \alpha_{22}$$

zou dan volgen $\alpha_{22} = 0$.

Evenzo volgt uit het tweede stel vergelijkingen $\alpha_{12} = 0$. Dan is $\alpha_{11}\beta_{11} = 1$, dus $\beta_{11} \neq 0$. Maar $\alpha_{21}\beta_{11} = 0$ levert dan $\alpha_{21} = 0$. Dit heeft tot gevolg

$$1 = \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} = 0,$$

wat een tegenspraak oplevert. M.a.w., er kan in dit geval geen A^{-1} bestaan. We concluderen derhalve: A^{-1} bestaat dan en slechts dan als $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$. De uitdrukking $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$, die kennelijk een belangrijke rol speelt in dit probleem, is een speciaal voorbeeld van wat we in §5 uitvoerig zullen onderzoeken, namelijk de <u>determinant</u> van een matrix A, afgekort det A.

(3.7) Zij $A : R \to R$ een lineaire transformatie van R in zichzelf. We onderzoeken de vraag: hoe verandert de matrix van A bij overgang op een andere basis? Laat A t.o.v. de basis $e_1, \ldots, e_n$ van R als matrix hebben (α_{ij}). Neem een andere basis $f_1, \ldots, f_n$. We schrijven de vectoren f_j als lineaire combinatie van $e_1, \ldots, e_n$:

(1) $f_j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} e_i, \quad j = 1, \ldots, n.$

Anderzijds kunnen we natuurlijk ook elke e_l in $f_1, \ldots, f_n$ uitdrukken:

(2) $e_l = \sum_{j=1}^{n} \tau_{jl} f_j.$

Vult men in deze laatste uitdrukking voor f_i de uitdrukking (1) in, dan vindt men

$$e_l = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \tau_{jl}\sigma_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\tau_{jl} \right) e_i.$$

Aangezien e_l maar op één manier als lineaire combinatie van $e_1, \ldots, e_n$ kan worden geschreven, moet in de laatste relatie gelden

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\tau_{jl} = \delta_{il} = 1 \text{ als } i = l$$
$$= 0 \text{ als } i \neq l.$$

Dat wil dus zeggen:

$$(\sigma_{ij})(\tau_{ij}) = I, \text{ de eenheidsmatrix.}$$

Anderzijds kunnen we (2) in (1) invullen:

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sigma_{ij}\tau_{li} f_l = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_{li}\sigma_{ij} \right) f_l .$$

Hieruit volgt dan $\sum_{i=1}^{n} \tau_{li}\sigma_{ij} = \delta_{lj}$, dus ook

$$(\tau_{ij})(\sigma_{ij}) = I.$$

We zien dus: de matrix (τ_{ij}) is de inverse van de matrix (σ_{ij}) : $(\tau_{ij}) = (\sigma_{ij})^{-1}$. We noemen (σ_{ij}) de <u>transformatiematrix</u> van de basis $e_1,\ldots,e_n$ in de basis $f_1,\ldots,f_n$. $(\tau_{ij}) = (\sigma_{ij})^{-1}$ is dan de matrix van de omgekeerde coördinatentransformatie.

We willen nu de matrix (β_{ij}) van de lineaire transformatie A t.o.v. de basis $f_1,\ldots,f_n$ berekenen. Dat gaat als volgt:

$$\begin{aligned} Af_j &= \sum_{l=1}^{n} \sigma_{lj} Ae_l \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \sigma_{lj}\alpha_{ml} e_m \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{lj}\alpha_{ml}\tau_{im} f_i . \end{aligned}$$

Anderzijds is $Af_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} f_i$, dus

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \tau_{im}\alpha_{ml}\sigma_{lj} \right) f_i .$$

Omdat de coëfficient voor elke f_i in beide leden van deze vergelijking dezelfde moet zijn, vinden we

$$\beta_{ij} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \tau_{im}\alpha_{ml}\sigma_{lj} .$$

In matrixvorm krijgen we, rekening houdend met $(\tau_{ij}) = (\sigma_{ij})^{-1}$,

$$(\beta_{ij}) = (\sigma_{ij})^{-1}(\alpha_{ij})(\sigma_{ij}).$$

Daarmee hebben we de volgende stelling bewezen.

<u>STELLING. Zij S : R → R een lineaire transformatie, $e_1,\ldots,e_n$ een basis van R, $f_1,\ldots,f_n$ een andere basis van R, zodat</u>

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} e_i, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Noem de matrix (σ_{ij}) ter afkorting S_0. Is A_e de matrix van A t.o.v. $e_1,\ldots,e_n$, A_f die t.o.v. $f_1,\ldots,f_n$, dan geldt de relatie

$$A_f = S_0^{-1} A_e S_0 .$$

Deze stelling kunnen we ook nog anders bewijzen, met minder rekenwerk. Laten E en $F : R \to k^n$ de coördinatiseringsafbeeldingen zijn behorende bij de bases $e_1,\ldots,e_n$, respectievelijk $f_1,\ldots,f_n$ van R. Dus

$$Ee_i = Ff_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$$

met de 1 op de i-de plaats. De matrix A_e kunnen we dan identificeren met (zie (3.4))

$$A_e = EAE^{-1},$$

evenzo

$$A = FAF^{-1}.$$

Daaruit volgt

$$A_f = FE^{-1} A_e EF^{-1} = (EF^{-1})^{-1} A_e (EF^{-1}).$$

De lineaire transformatie

$$S = F^{-1}E : R \to R$$

heeft de eigenschap

$$Se_i = f_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

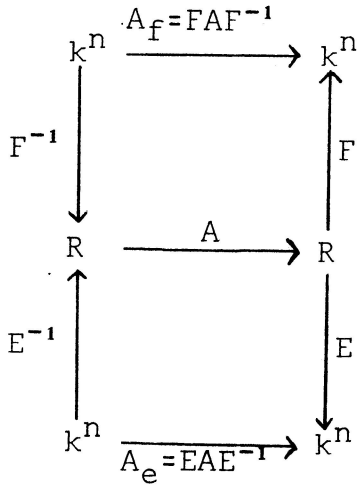
De matrix van S t.o.v. de basis $e_1,\ldots,e_n$ is precies de in de stelling beschreven matrix $S_0 = (\sigma_{ij})$. Dus

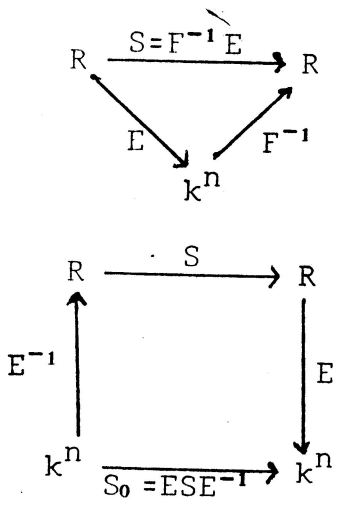
$$S_0 = ESE^{-1} = EF^{-1}EE^{-1} = EF^{-1}.$$

Vullen we dit in, dan krijgen we

$$A_f = S_0^{-1} A_e S_0 .$$

Het bovenstaande verhaal illustreren we met de volgende diagrammen van lineaire afbeeldingen.


k^n
$A_f = FAF^{-1}$
k^n
F^{-1}
F
R
A
R
E^{-1}
E
k^n
$A_e = EAE^{-1}$
k^n


R
$S = F^{-1}E$
R
E
F^{-1}
k^n
R
S
R
E^{-1}
E
k^n
$S_0 = ESE^{-1}$
k^n

§4. PERMUTATIES.

Als voorbereiding op de theorie van de determinanten, die in §5 aan bod komt, houden we ons nu eerst bezig met premutaties.

(4.1) DEFINITIE. Een permutatie van een verzameling V (of zoals we ook vaak zeggen: van de elementen van V) is een 1-1 afbeelding van V op zichzelf.

De identiteit van V is de permutatie die alle elementen vast laat; notatie: id_V, id., 1_V of 1. Het product van twee permutaties van V is een permutatie, evenals de inverse van een permutatie.

We houden ons verder uitsluitend bezig met permutaties van eindige verzamelingen. De elementen van V duiden we als regel aan met de natuurlijke getallen 1,2,...,n, dus V = {1,2,...,n}, ($n \geqslant 1$). Een permutatie hiervan kunnen we noteren door de rij getallen 1,2,...,n op te schrijven met daaronder de respectieve beelden $\pi 1, \pi 2, \ldots, \pi n$:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi 1 & \pi 2 & \ldots & \pi n \end{pmatrix}.$$

Zo is bijvoorbeeld $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
de permutatie van 1 t/m 5, die 1 op 3 afbeeldt, 2 op 2, 3 op 4, 4 op 5 en 5 op 1. Hoe ziet de identiteit eruit in deze notatie?

(4.2) DEFINITIE. Een misplaatsing van een permutatie π van {1,2,...,n} is een paar getallen i,j met $i < j$ en $\pi i > \pi j$. Het signum van π, afgekort $sg(\pi)$, is gedefinieerd door

$$sg(\pi) = (-1)^{m(\pi)},$$

waarin $m(\pi)$ het aantal misplaatsingen van π aanduidt. Is $sg(\pi) = 1$, d.w.z. $m(\pi)$ even, dan heet π een <u>even permutatie</u>, anders een <u>oneven permutatie</u>.

<u>Voorbeeld</u>. Neem $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. De misplaatsingen van π zijn: 1,3 - 1,4 - 2,3 - 2,4 - 2,5 - 3,4. In totaal zes misplaatsingen, dus $sg(\pi) = 1$.

De volgende stelling levert een andere karakterisering op van het signum, aangezien $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i) \neq 0$.

<u>STELLING. Is π een permutatie van 1,2,...,n, dan is</u>

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\pi j - \pi i) = sg(\pi) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i).$$

<u>Bewijs</u>. Is $i < j$, dan is $\pi j - \pi i$ ook een term uit het product $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)$ als $\pi i < \pi j$, terwijl voor $\pi i > \pi j$ daarentegen $-(\pi j - \pi i) = \pi i - \pi j$ een term uit dat product is. Om $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)$ dus in $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)$ te veranderen, moeten we het zo vaak met een factor -1 vermenigvuldigen, als er misplaatsingen van π zijn, dat is dus precies met $(-1)^{m(\pi)}$.

(4.3) <u>DEFINITIE</u>. Is π een permutatie van 1,2,...,n die i met j verwisselt ($i \neq j$) en de andere getallen vastlaat, dan noteren we π als (i,j). Dus voor $i < j$ is

$$(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Een permutatie (i,i+1), die dus twee opeenvolgende getallen verwisselt en de andere vastlaat, heet een <u>buurverwisseling of transpositie</u>.

STELLING. Voor permutaties π,ρ,τ van $1,2,\ldots,n$ geldt:

(i) Is $\tau = (i,j)$, $i \neq j$, dan is $sg(\tau) = -1$. In het bijzonder hebben buurverwisselingen signum -1.

(ii) Iedere permutatie is product van buurverwisselingen.

(iii) $sg(\pi\rho) = sg(\pi)sg(\rho)$.

(iv) Is $\pi = \tau_1\tau_2 \ldots\ldots\tau_l$, waarin de τ_i buurverwisselingen zijn, dan is $sg(\pi) = (-1)^l$, m.a.w. een permutatie is even (oneven), als hij product is van een even (respectievelijk oneven) aantal buurverwisselingen.

Bewijs. (i) We mogen aannemen dat $i < j$. We tellen het aantal misplaatsingen van $\tau = (i,j)$. Is $l < m$, dan is $\pi l > \pi m$ alleen dan, als $l = i$ en $i < m \leqslant j$, of als $i \leqslant l < j$ en $m = j$. Beschouw een h met $i < h < j$. Dit levert ons twee paren l,m op met $l < m$ en $\pi l > \pi m$, namelijk i,h en h,j. Verder is er dan nog de misplaatsing i,j. In totaal vinden we dus een oneven aantal misplaatsingen, bijgevolg $sg(\tau) = -1$.

(ii) 1 is het product van nul buurverwisselingen. Neem nu een permutatie $\pi \neq 1$. Zij a het kleinste getal, $1 \leqslant a \leqslant n$, met $\pi a \neq a$. Dus

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & a-1 & a & \ldots\ldots \\ 1 & 2 & \ldots & a-1 & b & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

met $b = \pi a > a$. Kennelijk is $a < n$ voor $\pi \neq 1$. We voeren het bewijs nu met inductie naar $n-a$. Voor $n-a = 1$ is $\pi = (n-1,n)$, dus π is zelf een buurverwisseling.

Stel nu, (ii) is bewezen voor alle permutaties met $n-a < k$, waarin $1 < k < n-1$, en zij π een permutatie met $n-a = k$. Voor $1 \leqslant i < a$ wordt i door π en door alle transposities $(a,a+1)$, $(a+1,a+2),\ldots,(b-1,b)$ op z'n plaats gelaten. Dus de permutatie

$$\sigma = (a,a+1)(a+1,a+2)\ldots\ldots(b-2,b-1)(b-1,b)\pi$$

laat alle i met $1 \leqslant i < a$ vast. Verder is

$$\sigma a = (a,a+1) \ldots\ldots (b-1,b)\pi a$$
$$= (a,a+1) \ldots\ldots (b-1,b)b$$
$$= (a,a+1) \ldots\ldots (b-2,b-1)(b-1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= (a,a+1)(a+1)$$
$$= a.$$

σ laat dus $1,2,\ldots,a$ vast en is derhalve volgens de inductieveronderstelling product van een aantal buurverwisselingen. Maar dan is

$$\pi = (b-1,b)(b-2,b-1)\ldots\ldots(a,a+1)\sigma$$

ook een product van buurverwisselingen. Daarmee is de inductiestap voltooid.

(iii) Volgens stelling (4.2) is voor willekeurige π en ρ:

$$sg(\pi\rho) \prod_{i<j} (j-i) = \prod_{i<j} (\pi\rho j - \pi\rho i)$$
$$= sg(\pi) \prod_{i<j} (\rho j - \rho i) \quad \text{(waarom ?)}$$
$$= sg(\pi)sg(\rho) \prod_{i<j} (j-i).$$

Delen door $\prod_{i<j} (j-i)$ levert de gezochte relatie.

(iv) Met inductie volgt uit (iii) dat voor $\pi = \tau_1\tau_2 \ldots\tau_l$ geldt

$$sg(\pi) = sg(\tau_1)sg(\tau_2) \ldots sg(\tau_l).$$

Zijn de τ_i buurverwisselingen, dan is $sg(\tau_i) = -1$ wegens (i), dus

$$sg(\pi) = (-1)^l.$$

OPMERKING. Is π te schrijven als product van buurverwisselingen, $\pi = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_l$, dan ligt de pariteit van l (d.i. het even of oneven zijn) vast door $sg(\pi) = (-1)^l$. Maar l zelf is niet door π ondubbelzinnig bepaald. Reken bijvoorbeeld zelf na, dat voor

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

de volgende schrijfwijzen mogelijk zijn (naast vele andere):

$$\pi = (1,2)(2,3)(3,4),$$

$$\pi = (3,4)(1,2)(2,3)(3,4)(2,3),$$

$$\pi = (5,6)(3,4)(1,2)(2,3)(1,2)(5,6)(3,4)(1,2)(2,3).$$

(4.4) STELLING. Het aantal permutaties van $1,2,\ldots,n$ bedraagt $n! = 1.2.3. \ldots .n$.

Bewijs. Het aantal permutaties van $1,2,\ldots,n$ noemen we a_n $(1 \leqslant n)$. We delen de permutaties van $1,2,\ldots,n$ op de volgende manier in n collecties $V_1, V_2, \ldots, V_n$ in. V_i bestaat uit de permutaties π met $\pi n = i$. Het is duidelijk dat iedere permutatie in precies één zo'n V_i voorkomt. Zit π in V_i, d.w.z. $\pi n = i$, dan zit $\rho = (i,n)\pi$ in V_n, en omgekeerd. V_i bevat dus evenveel permutaties als V_n. Maar V_n bestaat uit alle permutaties van $1,2,\ldots,n-1$, d.w.z. uit a_{n-1} elementen. Bijgevolg is

$$a_n = n\, a_{n-1}.$$

Het is duidelijk dat $a_1 = 1$. Uit bovenstaande relatie volgt nu

$$a_2 = 1.2,\ a_3 = 1.2.3,\ \ldots\ldots,\ a_n = 1.2.3. \ldots .n = n!.$$

Als u er behoefte aan voelt, de laatste zin wat netter te formuleren, gebruik dan volledige inductie.

§5. DETERMINANTEN.

In (3.6) hebben we bij het berekenen van de inverse van een 2×2-matrix $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, kennis gemaakt met de uitdrukking $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$. Het niet-nul-zijn van deze uitdrukking bleek een criterium te zijn voor het bestaan van de inverse matrix A^{-1}. We zullen nu analoge functies van de coëfficienten van een $n \times n$-matrix gaan onderzoeken, die we de determinant van een matrix noemen. We voeren ze door enkele axioma's in; deze werkwijze heeft zekere voordelen, bijvoorbeeld bij het voeren van bewijzen.

(5.1) Zij $A = (\alpha_{ij})$ een $n \times n$-matrix. De kolommen van A beschouwen we als vectoren in k^n; we noteren ze als

$$x_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots\ldots, \quad x_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

De functies van A die we gaan onderzoeken voeren we in als functies van de kolomvectoren $x_1, \ldots, x_n$. Men kan we derhalve ook opvatten als functies van n variabelen in een n-dimensionale vectorruimte, met waarden in k. We voeren ze nu in door een aantal eisen.

DEFINITIE. Zij gegeven een n-dimensionale lineaire ruimte R en een basis $e_1, \ldots, e_n$ van R, benevens een constante $\delta \in k$. De functie $D = D(x_1, \ldots, x_n)$ van n vectoren $x_i \in R$, met waarden in k, dient de volgende eigenschappen te hebben.

(1) Voor elke i, $1 \leqslant i \leqslant n$, geldt: bij vaste vectoren $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, is $D(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ een lineaire

functie in x_i. M.a.w.

$D(x_1,\ldots,x_i+x_i',\ldots,x_n) = D(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) + D(x_1,\ldots,x_i',\ldots x_n)$

$D(x_1,\ldots,\lambda x_i,\ldots,x_n) = \lambda D(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$.

(2) Zijn twee van de vectoren aan elkaar gelijk, d.w.z. $x_i = x_j$ voor zekere i en j met $i \neq j$, dan is $D(x_1,\ldots,x_n) = 0$.

(3) $D(e_1,\ldots,e_n) = \delta$.

De derde voorwaarde is een soort van normeringseis. Wil men, bij gegeven basis $e_1,\ldots,e_n$, de afhankelijkheid van D van de keuze van δ beklemtonen, dan kan men D_δ schrijven i.p.v. D. Indien echter geen verwarring dreigt, zullen we kortweg D schrijven.

Nemen we $R = k^2$, als basis e_1, e_2 de standaardbasis van k^2, en $\delta = 1$, dan voldoet voor $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ de functie $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$, als functie van de kolomvectoren van A opgevat, aan de drie eisen; ga na! De bedoeling is, algemeen aan te tonen dat er bij gegeven basis $e_1,\ldots,e_n$ van R en gegeven δ precies één functie D bestaat die aan (1) t/m (3) voldoet. Als functie van de kolomvectoren van een $n \times n$-matrix opgevat, voor $R = k^n$, als basis de standaardbasis en met $\delta = 1$, wordt dit de determinant van een matrix: zie de definitie in (5.2), na de stelling.

(5.2) We zullen nu een aantal eigenschappen van D bewijzen, die ons stap voor stap naar een expliciete berekening van D voeren. Voorlopig nemen we aan, dat er (tenminste één) D bestaat, die voldoet aan de eisen.

(i) Is $x_i = o$ voor zekere i, dan is $D(x_1,\ldots,x_n) = 0$. Want wegens eis (1) is dan

$$\begin{aligned} D(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) &= D(x_1,\ldots,0x_i,\ldots,x_n) \\ &= 0D(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Telt men bij x_i een lineaire combinatie van de andere vectoren $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ op, dan verandert D niet. We bewijzen dit gemakshalve voor $i = 1$. Door herhaaldelijk eis (1) toe te passen, vinden we

$$D(x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n, x_2,\ldots,x_n) = D(x_1,x_2,\ldots,x_n) +$$
$$+ \alpha_2 D(x_2,x_2,\ldots,x_n) + \ldots + \alpha_n D(x_n,x_2,\ldots,x_n)$$
$$= D(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

aangezien alle andere summanden $D(x_i,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$ nul zijn wegens eis (2).

(iii) Zijn $x_1,\ldots,x_n$ lineair afhankelijk, dan is $D(x_1,\ldots,x_n) = 0$. Stel nl. $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = o$ met $\alpha_i \neq 0$ voor zekere i. Na deling door α_i kunnen we aannemen dat $\alpha_i = 1$. Dan is

$$\begin{aligned} D(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) &= D(x_1,\ldots,\alpha_1 x_1 + \ldots x_i + \ldots + \alpha_n x_n,\ldots,x_n) \\ &= D(x_1,\ldots,o,\ldots,x_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wegens (i), (ii) en de gegeven lineaire afhankelijkheidsrelatie. In het vervolg zullen we het vaak aan de lezer overlaten om kritisch na te gaan, waarom bepaalde gelijkheden gelden.

(iv) Bij verwisseling van twee vectoren x_i en x_j $(i \neq j)$ gaat D in -D over. We bewijzen dit voor $i = 1$, $j = 2$.

$$\begin{aligned} D(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= D(x_1,x_1+x_2,\ldots,x_n) \\ &= D(x_1-(x_1+x_2),x_1+x_2,\ldots,x_n) \\ &= D(-x_2,x_1+x_2,\ldots,x_n) \\ &= D(-x_2,x_1+x_2-x_2,\ldots,x_n) \\ &= D(-x_2,x_1,\ldots,x_n) \\ &= -D(x_2,x_1,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

(v) Als $x_i = \alpha_{1i}e_1 + \alpha_{2i}e_2 + \ldots + \alpha_{ni}e_n$ voor $i = 1,\ldots,n$, dan volgt door herhaald toepassen van eis (1):

$$\begin{aligned} D(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= \sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{i_1,1}\, D(e_{i_1},x_2,\ldots,x_n) \\ &= \sum_{i_1,i_2=1}^{n} \alpha_{i_1,1}\alpha_{i_2,2} D(e_{i_1},e_{i_2},x_3,\ldots,x_n) \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} \alpha_{i_1,1}\alpha_{i_2,2}\cdots\alpha_{i_n,n} D(e_{i_1},e_{i_2},\ldots \\ &\qquad\qquad \ldots e_{i_n}). \end{aligned}$$

Als twee van de indices i_l en i_m gelijk zijn in een summand, d.w.z. $e_{i_l} = e_{i_m}$ $(l \neq m)$, dan is $D(e_{i_1},\ldots,e_{i_n}) = 0$ wegens (2). We hoeven dus alleen de termen met <u>verschillende</u> $i_1,\ldots,i_n$ te beschouwen, d.w.z.

$$D(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\pi} \alpha_{\pi 1,1}\alpha_{\pi 2,2}\cdots\alpha_{\pi n,n} D(e_{\pi 1},e_{\pi 2},\ldots,e_{\pi n}),$$

waarbij gesommeerd wordt over alle permutaties π van $1,\ldots,n$.

(vi) Is π een buurverwisseling, zeg $\pi = (i,i+1)$, dan is

$$\begin{aligned} D(e_{\pi 1},\ldots,e_{\pi n}) &= D(e_1,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},e_i,e_{i+2},\ldots,e_n) \\ &= -D(e_1,\ldots,e_{i-1},e_i,e_{i+1},e_{i+2},\ldots,e_n) \end{aligned}$$

wegens (iv). Door een willekeurige permutatie π te schrijven als product van buurverwisselingen, constateren we

$$D(e_{\pi 1},\ldots,e_{\pi n}) = sg(\pi)D(e_1,\ldots,e_n).$$

(vii) Door combinatie van (v), (vi) en eis (3) vinden we

$$D(x_1,\ldots,x_n) = \delta\Sigma_\pi sg(\pi)\alpha_{\pi 1,1}\alpha_{\pi 2,2}\cdots\alpha_{\pi n,n}.$$

Daarmee is bewezen dat er ten hoogste één functie D bestaat die aan de eisen (1), (2) en (3) voldoet. Omgekeerd willen we nu aantonen dat de hier berekende D inderdaad aan de drie eisen voldoet. Dat wil zeggen, we definiëren voor x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, voorgesteld als in (v),

$$D(x_1,\ldots,x_n) = \delta\Sigma_\pi sg(\pi)\,\alpha_{\pi 1,1}\alpha_{\pi 2,2}\cdots\alpha_{\pi n,n}.$$

Deze functie blijkt aan alle drie de eisen te voldoen.

Ad (1). Gemakshalve schrijven we het bewijs op voor i = 1; schrijf zelf het algemene geval eens uit! Met $x_1,\ldots,x_n$ als in (v) en $x_1' = \alpha'_{1,1}e_1 + \ldots + \alpha'_{n,1}e_n$ krijgen we

$$\begin{aligned} D(x_1+x_1',x_2,\ldots,x_n) &= \delta\Sigma_\pi sg(\pi)(\alpha_{\pi 1,1}+\alpha'_{\pi 1,1})\alpha_{\pi 2,2}\cdots\alpha_{\pi n,n} \\ &= \delta\Sigma_\pi sg(\pi)\alpha_{\pi 1,1}\alpha_{\pi 2,2}\cdots\alpha_{\pi n,n} + \\ &\quad + \delta\Sigma_\pi sg(\pi)\alpha'_{\pi 1,1}\alpha_{\pi 2,2}\cdots\alpha_{\pi n,n} \\ &= D(x_1,x_2,\ldots,x_n) + D(x_1',x_2,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Analoog verifieert men dat

$$D(\lambda x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lambda D(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Ad (2). Stel bijvoorbeeld $x_1 = x_2$. Zij τ de buurverwisseling (1,2). In D komt elke term

$$\alpha_{\pi 1,1}\,\alpha_{\pi 2,2}\cdots\alpha_{\pi n,n}$$

twee keer voor, eenmaal met het teken $sg(\pi)$, de tweede maal met het teken $sg(\pi\tau) = -sg(\pi)$, omdat immers

$$\begin{aligned} \alpha_{\pi 1,1}\,\alpha_{\pi 2,2} &= \alpha_{\pi 1,2}\,\alpha_{\pi 2,1} \quad \text{wegens } x_1 = x_2, \\ &= \alpha_{\pi\tau 2,2}\,\alpha_{\pi\tau 1,1} \\ &= \alpha_{\pi\tau 1,1}\,\alpha_{\pi\tau 2,2}. \end{aligned}$$

De som van deze twee bijdragen is 0, zodat D = 0 wordt.

Ad (3). $$\begin{aligned} D(e_1,\ldots,e_n) &= \delta\Sigma_\pi sg(\pi)\delta_{\pi 1,1}\delta_{\pi 2,2}\cdots\delta_{\pi n,n} \\ &= \delta, \end{aligned}$$

omdat $\delta_{\pi j,j} = 1$ als $\pi j = j$, en 0 in alle andere gevallen, dus de enige summand $\neq 0$ is die met $\pi = 1$.

We vatten de boven bewezen resultaten nu samen.

STELLING. Zij R een n-dimensionale lineaire ruimte. Bij vast gekozen basis $e_1,\ldots,e_n$ van R en vaste $\delta \in k$ bestaat er precies één functie $D = D(x_1,\ldots,x_n)$ van n vectoren x_i uit R, met waarden in U die voldoet aan de eisen

(1) D is een lineaire functie in elk van de vectoren x_j, bij vaste $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$.

(2) $D = 0$ als van de vectoren $x_1,\ldots,x_n$ er twee gelijk zijn.

(3) $D(e_1,\ldots,e_n) = \delta$.

Als $x_i = \alpha_{1,i}e_1 + \alpha_{2,i}e_2 + \ldots + \alpha_{n,i}e_n$, dan is

$$D(x_1,\ldots,x_n) = \delta\sum_{\pi} sg(\pi)\alpha_{\pi 1,1},\ldots,\alpha_{\pi n,n},$$

gesommeerd over alle permutaties π van $1,2,\ldots,n$.

DEFINITIE. Is $A = (\alpha_{i,j})$ een $n \times n$-matrix met kolomvectoren

$$x_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1,i} \\ \vdots \\ \alpha_{n,i} \end{pmatrix},$$

dan definiëren we

$$\det A = D_1(x_1,\ldots,x_n),$$

waarin de D_1 de functie D als boven is met $\delta = 1$ bij de standaardbasis in k^n, d.w.z. met

$$\det (I) = 1.$$

We noemen det A de determinant van A.

Uit bovenstaande stelling volgt direct:

$$\det (\alpha_{ij}) = \sum_{\pi} sg(\pi)\alpha_{\pi 1,1}\alpha_{\pi 2,2}\ldots\alpha_{\pi n,n}.$$

Voor det (α_{ij}) schrijft men vaak

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

soms ook wel $|\alpha_{ij}|_{i,j=1,\ldots,n}$.

(5.3) Enige voorbeelden van determinanten die we gemakkelijk kunnen uitrekenen, laten we nu volgen.

(i) $A = (\alpha)$, een 1×1-matrix. Er is slechts één permutatie, nl. id., met $sg(id.) = 1$, dus

$$\det(A) = \alpha.$$

(ii) $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, een 2×2-matrix. Dan is

$$\begin{aligned} \det A &= sg(1)\alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} + sg((1,2))\alpha_{2,1}\,\alpha_{1,2} \\ &= \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2} - \alpha_{2,1}\,\alpha_{1,2}. \end{aligned}$$

Dit is precies de uitdrukking die we in (3.6) gevonden hadden.

(iii) Zij $A = (\alpha_{ij})$ een 3×3-matrix. De $3! = 6$ permutaties van 1,2,3 voeren deze getallen over in resp. 1,2,3; 2,1,3; 1,3,2; 3,2,1; 3,1,2; 2,3,1. Reken van al deze premutaties het signum uit. Dan ziet men dat

$$\begin{aligned} \det A = {} & \alpha_{1,1}\,\alpha_{2,2}\,\alpha_{3,3} - \alpha_{2,1}\,\alpha_{1,2}\,\alpha_{3,3} - \alpha_{1,1}\,\alpha_{3,2}\,\alpha_{2,3} \\ & - \alpha_{3,1}\,\alpha_{2,2}\,\alpha_{1,3} + \alpha_{3,1}\,\alpha_{1,2}\,\alpha_{2,3} + \alpha_{2,1}\,\alpha_{3,2}\,\alpha_{1,3}. \end{aligned}$$

(iv) $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

Dit volgt rechtstreeks uit de eisen (1) en (3), maar men kan het ook uit de formule voor de determinant afleiden. Geef een volledig bewijs volgens elk van de twee methoden.

(v) $$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}$$

(d.w.z. $A = (\alpha_{ij})$ met $\alpha_{ij} = 0$ voor $i > j$). Dit ziet men als volgt in.

$\alpha_{\pi i, i} = 0$ als $\pi i > i$. De enige permutatie π met $\pi i \leqslant i$ voor alle i, is $\pi = 1$, waaruit het beweerde volgt. Laat zelf zien dat het ook volgt uit (ii) van (5.2) en de hierboven genoemde eigenschap (iv). Analoog is

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ddots & \vdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \alpha_{n1} & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}$$

(vi) Stel

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

waarin B een $l \times l$-matrix is, D een $m \times m$-matrix en C een $l \times m$-matrix. Voor $1 \leqslant j \leqslant l$ is

$\alpha_{\pi j, j} = 0$ als $\pi j > l$.

In de uitdrukking

$$\det A = \sum_{\pi} \operatorname{sg} \pi \; \alpha_{\pi 1, 1} \, \alpha_{\pi 2, 2} \cdots \alpha_{\pi n, n}$$

hoeven we dus alleen permutaties te beschouwen waarvoor $\pi j \leqslant l$ als $j \leqslant l$, d.w.z. die $1, \ldots, l$ onderling permuteren.

Maar dan moet ook $\pi j > 1$ als $j > 1$. Dus

$$\pi = \pi_1 \pi_2 ,$$

waarin π_1 een permutatie is van $1,\ldots,l$, π_2 een permutatie van $l+1,\ldots,n$. Dus

$$\det A = \sum_{\pi_1 \pi_2} \operatorname{sg}(\pi_1)\operatorname{sg}(\pi_2)\alpha_{\pi_1 1,1}\cdots\alpha_{\pi_1 l,l}\,\alpha_{\pi_2(l+1),l+1}\cdots\alpha_{\pi_2 n,n},$$

waarbij gesommeerd moet worden over alle permutaties π_1 van $1,\ldots,l$ en π_2 van $l+1,\ldots,n$. Dus

$$\det A = \Big(\sum_{\pi_1} \operatorname{sg}(\pi_1)\alpha_{\pi_1 1,1}\cdots\alpha_{\pi_1 l,l}\Big)\Big(\sum_{\pi_2} \operatorname{sg}(\pi_2)\alpha_{\pi_2(l+1),l+1}\cdots\alpha_{\pi_2 n,n}\Big)$$

$$\det A = \det B \,.\, \det D.$$

Analoog bewijst men dat voor

$$A = \begin{pmatrix} B & \Theta \\ C & D \end{pmatrix},$$

waarin B en D vierkante matrices zijn, eveneens geldt

$$\det A = \det B \,.\, \det D.$$

(5.4) Is $D(x_1,\ldots,x_n) = D(X)$ een functie van de kolommen $x_1,\ldots,x_n$ van een $n \times n$-matrix X, die aan (1) en (2) voldoet en waarvoor $D(I) = \delta$, dan is $D(X) = \delta \det X = D(I)\det X$ voor alle X. Dit is een direct gevolg van de stelling in (5.2) en de definitie van det. Neem m een vaste $n \times n$-matrix A en beschouw de functie $D(X) = \det(AX)$ van $n \times n$-matrices X. Uit de definitie van matrixvermenigvuldiging volgt dat AX als kolomvectoren heeft: $Ax_1,\ldots,Ax_n$, als $x_1,\ldots,x_n$ de kolommen van X zijn. Daarmee verifieert men zonder moeite dat deze functie D aan de eisen (1) en (2) voldoet. Verder is $D(I) = \det(AI) = \det A$. Uit wat we boven opgemerkt hebben volgt dus

$$\det(AX) = \det A \,.\, \det X.$$

Is A inverteerbaar, dan volgt uit $A.A^{-1} = I$ dat $\det A \,.\, \det(A^{-1}) = 1$, dus $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

STELLING. Zijn A en B n × n-matrices, dan is

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Is A een inverteerbare matrix, dan is $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

(5.5) DEFINITIE. Onder de gespiegelde of getransponeerde van een r × s-matrix $A = (\alpha_{ij})$ verstaan we de s × r-matrix $A' = (\beta_{ij})$ met $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$ voor alle i en j. In plaats van A' schrijft men ook wel A^t, of ${}^tA$.

De gespiegelde van een vierkante matrix is weer vierkant. De gespiegelde van een matrix krijgt men door de matrix te spiegelen in een lijn die de coëfficienten $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{ii}, \ldots$ verbindt, de zogenaamde hoofddiagonaal.

STELLING. Is A een n × n-matrix, dan is $\det A' = \det A$.

Bewijs. Zij $A = (\alpha_{ij})$. Dan is

$$\det A = \sum_\pi sg(\pi)\alpha_{\pi 1,1}\,\alpha_{\pi 2,2}\cdots\alpha_{\pi n,n}$$

$$= \sum_\pi sg(\pi)\alpha_{\pi 1,\pi^{-1}(\pi 1)}\,\alpha_{\pi 2,\pi^{-1}(\pi 2)}\cdots\alpha_{\pi n,\pi^{-1}(\pi n)}.$$

Schrijf de $\alpha_{i,j}$ in elke summand in volgorde van opklimmende waarde van $\pi 1, \pi 2, \ldots, \pi n$, dan krijgen we

$$\det A = \sum_\pi sg(\pi)\alpha_{1,\pi^{-1}1}\,\alpha_{2,\pi^{-1}2}\cdots\alpha_{n,\pi^{-1}n}.$$

Doorloopt π de verzameling van alle permutaties van $1,\ldots,n$, dan doorloopt ook π^{-1} al die permutaties (waarom ?). Verder ziet men gemakkelijk in dat $sg(\pi) = sg(\pi^{-1})$, dus

$$\det A = \sum_\rho sg(\rho)\alpha_{1,\rho 1}\,\alpha_{2,\rho 2}\cdots\alpha_{n,\rho n}$$

$$= \det A'.$$

(5.6) Bij spiegeling van een matrix gaan de rijen in de kolommen over en de kolommen in de rijen.

Omdat det A niet verandert bij spiegeling volgt hieruit dat alle uitspraken in (5.2) geldig blijven als we over de rijen in plaats van de kolommen van een matrix praten. We komen zo tot de volgende stelling.

STELLING. De determinant van een matrix, det A, is een functie met waarden in k met de volgende eigenschappen.
(i) det A is een lineaire functie in elk van de kolommen (rijen) afzonderlijk.
(ii) det A = 0 als twee van de kolommen (rijen) gelijk zijn.
(iii) det I = 1.
De determinant is gekarakteriseerd door de eisen (i), (ii) en (iii), hetzij voor de kolommen alleen, hetzij voor de rijen alleen. Verder heeft det nog de volgende eigenschappen.
(iv) Past men op de kolommen (rijen) een permutatie π toe, dan wordt det A met $sg(\pi)$ vermenigvuldigd.
(v) det A $\neq$ 0 dan en slechts dan als de kolommen (rijen) van A lineair afhankelijk zijn, dat is dan en slechts dan als A niet inverteerbaar is.
Bewijs. (i), (ii) en (iii) volgen uit de stelling in (5.2) en de opmerking hierboven.

(iv) volgt voor de kolommen uit (5.2), (iv) (det A wordt met -1 vermenigvuldigd bij verwisseling van twee kolommen) en het feit dat iedere permutatie product is van buurverwisselingen: $\pi = \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r$, $sg(\pi) = (-1)^r$. Voor de rijen krijgen we dan het resultaat weer door spiegelen in de hoofddiagonaal.

(v) bewijst men als volgt. In (5.2), (iii) is bewezen dat det A = 0 als de kolommen van A lineair afhankelijk zijn; hetzelfde geldt dan ook voor de rijen wegens det A = det A'.

Stel nu dat de kolommen van A lineair onafhankelijk zijn. Dit betekent dat A, als lineaire transformatie van k^n in k^n opgevat, de standaardbasis van k^n weer in een basis overvoert, dus is A een 1-1 afbeelding van k^n op zichzelf, d.w.z. A^{-1} bestaat. Wegens

$$\det A \,.\, \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

is dan $\det A \neq 0$. Voor de rijen bewijst men 't weer door te spiegelen.

(5.7) In het algemeen is de formule

$$\det A = \sum_{\pi} sg(\pi)\alpha_{\pi 1,1}\,\alpha_{\pi 2,2} \cdots \alpha_{\pi n,n}$$

te gecompliceerd voor berekening van A. Het aantal summanden is daarvoor veel te groot, nl. n! Bijvoorbeeld, 5! is al 120, terwijl 10! = 3.628.800. Een eerste methode om de berekening wat te vereenvoudigen, is een reductie tot berekening van kleinere determinanten.

DEFINITIE. Is $A = (\alpha_{i,j})$ een $n \times n$-matrix, dan is $A_{i,j}$ de $(n-1) \times (n-1)$-matrix die men uit A verkrijgt door de i-de rij en de j-de kolom te schrappen. $A_{i,j}$ heet de submatrix van de coëfficient $\alpha_{i,j}$, $\det A_{i,j}$ de minor van $\alpha_{i,j}$. Verder is

$$D_{i,j} = D_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \det A_{i,j}.$$

We noemen $D_{i,j}$ de cofactor van $\alpha_{i,j}$ om redenen die in onderstaande stelling duidelijk zullen worden.

Is bijvoorbeeld $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, dan is $A_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$,

$A_{32} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, $D_{11} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$,

$$D_{32} = -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \quad D_{22} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Merk op dat de tekens $(-1)^{i+j}$ in $D_{i,j}$ "schaakbordachtig" verdeeld zijn:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

In dit figuurtje is α_{ij} vervangen door $(-1)^{i+j}$.

STELLING. Zij $A = (\alpha_{ij})$ een $n \times n$-matrix. Dan geldt voor elke i, $1 \leq i \leq n$, en voor elke j, $1 \leq j \leq n$:

(i) $\det A = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{lj} D_{lj}$ ("ontwikkelen van det A naar de j-de kolom").

(ii) $\det A = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il} D_{il}$ ("ontwikkelen van det A naar de i-de rij").

Bewijs. We tonen (i) aan; (ii) volgt daaruit bijvoorbeeld door spiegelen in de hoofddiagonaal, maar kan ook rechtstreeks bewezen worden analoog aan (i). We schrijven de j-de kolom x_j als lineaire combinatie van de standaardbasisvectoren $e_1, \ldots, e_n$ van k^n:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} = \alpha_{1j}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_{2j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_{nj}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus $\det A = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{lj} \det B_{lj}$, waarin B_{lj} de matrix is die we uit A verkrijgen door de j-de kolom te vervangen door e_l, dat is de kolom met op de l-de plaats een 1 en elders nullen. Op de kolommen van B_{lj} passen we nu de permutatie

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ 2 & 3 & \ldots & j & 1 & j+1 & \ldots & n \end{pmatrix} = (1,2)(2,3)\ldots(j-1,j)$$

toe.

Merk op dat $sg(\pi) = (-1)^{j-1}$. In de aldus verkregen matrix verwisselen we vervolgens de rijen volgens de permutatie

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & l-1 & l & l+1 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & l & 1 & l+1 & \dots & n \end{pmatrix} = (1,2)(2,3) \dots (l-1,l).$$

Hier is $sg(\rho) = (-1)^{l-1}$. We krijgen dan

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{lj} sg(\pi) sg(\rho) \begin{vmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{lj} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}.$$

Hierbij is $\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{lj} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ een matrix die men krijgt door aan de submatrix A_{lj} van α_{lj} in A nog een rij en kolom aan te plakken met in de (eerste) kolom overal nullen, behalve in de linkerbovenhoek waar een 1 komt. Uit (5.3), (vi) volgt

$$\begin{vmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{lj} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = \det A_{lj}.$$

Dus

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{lj} (-1)^{j+l} \det A_{lj} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{lj} D_{lj}.$$

(5.8) Het bovenstaande resultaat kan men generaliseren in die zin, dat men een determinant ook naar p rijen tegelijk kan ontwikkelen (of naar p kolommen tegelijk), waarin p een vast getal is met $1 \leqslant p \leqslant n$. Beschouw bijvoorbeeld het geval dat we de eerste p rijen tegelijk nemen. Men schrijft dan:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p1} & & \dots & \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} & & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & \\ \alpha_{p+1,1} & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \alpha_{n3} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{p1} & 0 & & & \\ 0 & \alpha_{p+1,2} & & & \\ 0 & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{p2} & & & \\ \alpha_{p+1,1} & 0 & & & \\ \alpha_{n1} & 0 & \alpha_{n3} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 0 & & & \\ \alpha_{p+1,1} & \alpha_{p+1,2} & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & & \alpha_{nn} \end{vmatrix} .$$

$= \dots\dots$ enzovoort.

Men splitst dus achtereenvolgens elke kolom in twee stukken:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{ij} \\ \\ \\ \\ \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{pj} \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_{p+1,j} \\ \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} .$$

Men krijgt zo voor det (α_{ij}) een som van determinanten van matrices, die elk in een aantal kolommen de coëfficienten α_{ij} van de eerste p rijen hebben en daaronder nullen, en in de overige kolommen precies andersom. Men bedenkt nu dat deze determinanten zeker nul zijn, als men niet precies in p kolommen de coëfficienten van de eerste p rijen neemt en daaronder nullen. Vervolgens permuteert men in het laatste geval zodanig, dat matrices van het type

$$\begin{pmatrix} P & \theta \\ \theta & Q \end{pmatrix}$$

ontstaan, waarin P een p × p-matrix en Q een (n-p) × (n-p)-matrix is. De determinant van zo'n matrix is gelijk aan det P. .det Q, waar men dan nog een factor ± 1 voor moet zetten, vanwege het permuteren van de kolommen. Men komt zo uiteindelijk tot een uitdrukking voor det (α_{ij}), zoals we hieronder zullen

vermelden. Men kan ook met p willekeurige rijen werken in plaats van met de eerste p. Ook kan men naar p kolommen tegelijk ontwikkelen. Het precieze bewijs laten we hier achterwege; dit zal in een practicumopgave behandeld worden. We volstaan verder met het resultaat te formuleren. Allereerst:

Notatie. Is $(i_1,i_2,\ldots,i_p)$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$, een deelrij van $(1,2,\ldots,n)$, dan noteren we de complementaire deelrij als $(i_1',i_2',\ldots,i_{n-p}')$, dat is de rij getallen waarvoor geldt:
$1 \leqslant i_1' < i_2' < \ldots < i_{n-p}' \leqslant n$ en

$$\{i_1,i_2,\ldots,i_p\} \cup \{i_1',i_2',\ldots,i_{n-p}'\} = \{1,2,\ldots,n\}.$$

STELLING. Zij $A = (\alpha_{ij})$ een $n \times n$-matrix, p een natuurlijk getal met $1 \leqslant p \leqslant n$. Dan geldt voor elke rij $(i_1,i_2,\ldots,i_p)$ met $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$, en voor elke rij $(j_1,j_2,\ldots,j_p)$ met $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leqslant n$:

(i)

$$\det A = (-1)^{\sum_{m=1}^{p} i_m} \sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_p \leqslant n} (-1)^{\sum_{m=1}^{p} l_m} \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 l_1} & \cdots & \alpha_{i_1 l_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_p l_1} & \cdots & \alpha_{i_p l_p} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{i_1' l_1'} & \cdots & \alpha_{i_1' l_{n-p}'} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_{n-p}' l_1'} & \cdots & \alpha_{i_{n-p}' l_{n-p}'} \end{vmatrix}$$

("ontwikkelen van A naar de i_1-de, i_2-de, ..., i_p-de rij").

(ii)

$$\det A = (-1)^{\sum_{m=1}^{p} j_m} \sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_p \leqslant n} (-1)^{\sum_{m=1}^{p} l_m} \begin{vmatrix} \alpha_{l_1 j_1} & \cdots & \alpha_{l_1 j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{l_p j_1} & \cdots & \alpha_{l_p j_p} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{l_1' j_1'} & \cdots & \alpha_{l_1' j_{n-p}'} \\ \vdots & & \\ \alpha_{l_{n-p}' j_1'} & \cdots & \alpha_{l_{n-p}' j_{n-p}'} \end{vmatrix}$$

("ontwikkelen van A naar de j_1-de, j_2-de, ..., j_p-de kolom").

Tracht uzelf inzicht in deze formules te verschaffen door bijvoorbeeld (i) uit te schrijven voor het geval $i_1=1, i_2=2, \ldots, i_p=p$, m.a.w. ontwikkeling naar de eerste p rijen. Wat is in dat geval $\sum_{m=1}^{p} i_m$? Voor p = 1 hebben we de stelling van de vorige sectie, (5.7), terug. Voor p = n staat er een trivialiteit, nl.

$$\det A = \det A.$$

(Ga na!).

(5.9) De meest eenvoudige manier om een niet te grote determinant uit te rekenen is als regel, gebruik te maken van het feit dat een determinant niet verandert als men bij een bepaalde rij (kolom) een lineaire combinatie van andere rijen (kolommen) optelt. Stel bijvoorbeeld $\alpha_{ij} \neq 0$. Men kan nu $\alpha_{ij}^{-1}\alpha_{1j}$ maal de i-de rij aftrekken van de eerste rij, $\alpha_{ij}^{-1}\alpha_{2j}$ maal de i-de rij van de tweede rij, enzovoort. Op deze manier krijgt men een matrix die in de j-de kolom overal nullen heeft behalve op de i-de plaats van boven, en die dezelfde determinant heeft als de oorspronkelijke matrix. We noemen dit procédé: <u>vegen met de i-de rij</u>. Heeft men een matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & 0 & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,j-1} & 0 & \alpha_{2,j+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i,1} & \cdots & \alpha_{i,j-1} & \alpha_{i,j} & \alpha_{i,j+1} & \cdots & \alpha_{i,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & 0 & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

dan is, wegens stelling (5.7),

$$\det A = \alpha_{i,j}\, D_{i,j}.$$

Om $D_{i,j}$ te berekenen, kan men weer in $A_{i,j}$ gaan vegen. Als $\alpha_{i,j} \neq 0$ in een matrix A, dan kan men ook met de j-de kolom gaan vegen, om alle coëfficienten in de i-de rij nul te maken, behalve $\alpha_{i,j}$ zelf. Men trekt daartoe $\alpha_{i,j}^{-1}\alpha_{i,1}$ maal de j-de kolom af van de eerste kolom, $\alpha_{i,j}^{-1}\alpha_{i,2}$ maal de j-de kolcm van de tweede kolom, enz. Dit heet <u>vegen met de j-de kolom</u>. We illustreren dit met een voorbeeld.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ (vegen met de eerste rij)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ (ontwikkelen naar de eerste kolom)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 15 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$ (vegen met de eerste kolom)

$$= \begin{vmatrix} -5 & 15 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$ (ontwikkelen naar de eerste rij)

$= (-5).6 - 15.(-3)$ (direct uitrekenen)

$= -30 + 45$

$= 15.$

Men kan ook anders te werk gaan, bijvoorbeeld als volgt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ (vegen met de eerste rij)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$ (vegen met de tweede rij)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$ (vegen met de derde rij)

$= 15$ (vermenigvuldigen van de diagonaalelementen).

(5.10) Gebruik makend van de ontwikkeling van een determinant naar één van z'n rijen (zie (5.7)), kunnen we nu de inverse van een matrix $A = (\alpha_{ij})$ berekenen. We weten uit stelling (5.6), (v) dat A^{-1} dan en slechts dan bestaat als $\det A \neq 0$. We nemen verder aan dat inderdaad $\det A \neq 0$. Zoals we in (3.6) gezien hebben, voldoet $A^{-1} = (\beta_{ij})$ aan de vergelijkingen

$$\sum_{l=1}^{n} \alpha_{il} \beta_{lj} = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

Hierin is $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$. We kunnen nu een oplossing voor dit stelsel vergelijkingen in de β_{lj} construeren door de volgende kunstgreep.

Vervang in de matrix A de j-de rij door de i-de rij, en laat de andere coëfficienten staan.

Is $i = j$, dan is er niets veranderd in A. Ontwikkeling naar de i-de rij levert in dit geval

(*) $\det A = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il} D_{il}$.

Is echter $i \neq j$, dan hebben we een matrix gekregen met twee gelijke rijen, nl. de i-de en de j-de rij. De determinant daarvan is dus 0, maar anderzijds kunnen we hem berekenen door ontwikkelen naar de j-de rij. Dit levert

(**) $0 = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il} D_{jl}$ als $i \neq j$.

Immers: op de l-de plaats in de j-de rij staat α_{il}, en de minor daarvan is dezelfde als de minor van α_{jl} in de oorspronkelijke matrix A. Uit (*) en (**) samen volgt dat

$$\sum_{l=1}^{n} \alpha_{il} (\det A)^{-1} D_{jl} = \delta_{ij}.$$

Daaruit volgt dat de gezochte coëfficienten zijn:

$$\beta_{lj} = (\det A)^{-1} D_{jl}.$$

Hiermee is bewezen:

STELLING. De inverse van een $n \times n$-matrix A met $\det A \neq 0$ is $A^{-1} = (\beta_{ij})$, met

$$\beta_{ij} = (\det A)^{-1} D_{ji}.$$

Hierin is $D_{ji} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$, A_{ji} de submatrix van α_{ji}.

Voorbeelden. 1. Is $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, dan is $\det A = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$. De minor van α_{11} is $A_{11} = (\alpha_{22})$, dus $D_{11} = (-1)^{1+1}\alpha_{22} = \alpha_{22}$. Verder is $A_{12} = (\alpha_{21})$, dus $D_{12} = (-1)^{1+2}\alpha_{21} = -\alpha_{21}$. Analoog vinden we $A_{21} = -\alpha_{12}$ en $A_{22} = \alpha_{11}$. Wanneer $\det A \neq 0$, is dus de inverse van A de matrix

$$A^{-1} = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix}.$$

Reken zelf na, dat deze matrix bij vermenigvuldiging met A inderdaad I oplevert.

2. Beschouw de 3 × 3-matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hiervoor vinden we: det A = 2. De submatrix $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dus $D_{11} = 0$; de submatrix $A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dus $D_{12} = -2$.

Analoog vinden we $D_{13} = 2$, $D_{21} = 1$, $D_{22} = 1$, $D_{23} = -1$, $D_{31} = -1$, $D_{32} = 1$, $D_{33} = 1$. De inverse matrix wordt dus

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vermenigvuldig zelf deze matrix met A, om te controleren of er I uitkomt.

(5.11) Is $A : R \to R$ een lineaire afbeelding van een eindig-dimensionale lineaire ruimte in zichzelf, dan wordt A, na keuze van een basis in R, beschreven door een matrix A_0. We beweren dat det A_0 niet afhangt van de speciale keuze van de basis. Zij nl. A_1 de matrix van A t.o.v. een andere basis, dan is er een inverteerbare matrix S zodat

$$A_1 = SA_0S^{-1}.$$

Daaruit volgt

$$\det A_1 = \det S.\det A_0.(\det S)^{-1}$$
$$= \det A_0.$$

STELLING. Is A een lineaire afbeelding van een eindig-dimensionale lineaire ruimte in zichzelf, dan heeft det A_0 voor elke matrix A_0 die A voorstelt, dezelfde waarde. We noemen die waarde det A, de determinant van de lineaire afbeelding A.

§6. NULRUIMTE EN RANG VAN EEN LINEAIRE AFBEELDING.

In deze paragraaf bestuderen we de nulruimte van een lineaire afbeelding A, d.i. de verzameling van vectoren x met Ax = o. Verder houden we ons bezig met de dimensie van de beeldruimte van A, de rang van A geheten, en met verschillende manieren om de rang uit de matrix van A te berekenen.

(6.1) DEFINITIE. De nulruimte van een lineaire afbeelding $A : R \to S$ is de verzameling $N = \{x \in R | Ax = o\}$. Is V een deelverzameling van S, dan is het volledig origineel van V onder A de verzameling $A^{-1}V = \{x \in R | Ax \in V\}$.

Let op, de notatie $A^{-1}V = \{x \in R | Ax \in V\}$ voor een deelverzameling V van S betekent beslist niet dat A een inverse hoeft te hebben. De nulruimte van A is hetzelfde als $A^{-1}o$; hierbij schrijven we $A^{-1}x$ voor $A^{-1}\{x\}$, als $x \in S$.

LEMMA. Is $A : R \to S$ een lineaire afbeelding en L een lineaire deelruimte van S, dan is $A^{-1}L$ een lineaire deelruimte van R.

Bewijs. Voor Ax en Ay $\in$ L is ook $A(x+y) = Ax+Ay \in L$ en $A(\lambda x) = \lambda Ax \in L$.

(6.2) Notaties als in (6.1). We kiezen een basis $e_1,\ldots,e_d$ van N en breiden die uit tot een basis $e_1,\ldots,e_d,e_{d+1},\ldots,e_n$ van R. Omdat $Ae_i = 0$ voor $1 \leqslant i \leqslant d$, wordt AR opgespannen door $Ae_{d+1},\ldots,Ae_n$ (als $d < n$). Deze vectoren zijn ook lineair onafhankelijk. Uit

$$\lambda_{d+1}Ae_{d+1} + \ldots + \lambda_n Ae_n = o$$

volgt nl. $A(\lambda_{d+1}e_{d+1} + \ldots + \lambda_n e_n) = o$.

Dus $\lambda_{d+1}e_{d+1} + \ldots + \lambda_n e_n \in N$, d.w.z. deze vector is lineair afhankelijk van $e_1, \ldots, e_d$. Omdat $e_1, \ldots, e_n$ een basis is, kan dat alleen voor $\lambda_{d+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. De vectoren $Ae_{d+1}, \ldots, Ae_n$ vormen dus een basis van AR. Derhalve is dim AR = n-d = = dim R - dim N. Daarmee is bewezen:

STELLING. Is $A : R \to S$ een lineaire afbeelding met nulruimte N, dan is

$$\dim R = \dim N + \dim AR.$$

(6.3) Zelfde notaties als boven. Wat is het volledig origineel van Ax voor $x \in R$? $y \in R$ zit in $A^{-1}(Ax)$ dan en slechts dan als

$$Ay = Ax$$

$$A(y-x) = o$$

$$y-x \in N.$$

Daarmee zien we

STELLING. Zij $A : R \to S$ een lineaire afbeelding met nulruimte N. Het volledig origineel van Ax, voor $x \in R$, is

$$A^{-1}(Ax) = x+N = \{x+y \mid y \in N\}.$$

Is L een deelruimte van R, dan krijgt men

$$x+L = \{x+y \mid y \in L\}$$

door bij alle vectoren van L de vaste vector x op te tellen. M.a.w., we "verschuiven" L over de vector x.

DEFINITIE. Is L een lineaire deelruimte van R, dan heet $x+L = \{x+y \mid y \in L\}$ een lineaire variëteit evenwijdig met L. Is dim L = d, dan heet x+L ook de d-dimensionaal.

Het volledig origineel van een punt onder een lineaire afbeelding is dus een lineaire variëteit evenwijdig met de nulruimte. Let op: een lineaire variëteit is i.h.a. geen lineaire deelruimte!

Stel we hebben twee vectoren x en y $\in$ R zodat x+L = y+L. Dan is dus in het bijzonder

$$y = x+l \text{ voor zekere } l \in L,$$

dus

$$y-x \in L.$$

Is omgekeerd $y-x \in L$, dan is dus $y = x+l$ voor zekere $l \in L$, en voor iedere $m \in L$ geldt dan

$$y+m = x+l+m \in x+L,$$

dus

$$y+L \subseteq x+L.$$

Anderzijds volgt uit $y-x \in L$ dat $x-y \in L$, waaruit net als boven volgt dat

$$x+L \subseteq y+L.$$

Daarmee is dus bewezen:

LEMMA. Is L een lineaire deelruimte van R, dan is x+L = y+L dan en slechts dan als $y-x \in L$.

(6.4) Stel N is een willekeurige lineaire deelruimte van R.

Bestaat er dan een lineaire afbeelding P van R in een of andere lineaire ruimte S, die precies N als deelruimte heeft? We kunnen deze vraag heel eenvoudig op de volgende manier beantwoorden. Stel dim R = n en dim N = d. Kies een basis $e_1,\ldots,e_n$ van R zodat $e_1,\ldots,e_d$ een basis van N is. De lineaire afbeelding $A : R \to k^{n-d}$ met

$$A(\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n) = (\xi_{d+1},\ldots,\xi_n)$$

heeft precies N als nulruimte zoals men makkelijk nagaat. Hoewel hiermee het probleem opgelost is, willen we het nu ook nog op een abstractere manier aanpakken. Redenen hiervoor zijn: 1^0 er komen daarbij een aantal belangrijke nevenaspecten ter sprake; 2^0 de boven gegeven constructie hangt af van de basis, is dus niet "kanoniek" in die zin, dat hij door R en N alleen bepaald is; 3^0 de navolgende constructie zullen we later, in een gevarieerde vorm, in andere delen van de algebra opnieuw tegenkomen.

We gaan nu S en $P : R \to S$ construeren, zodat N de nulruimte van P is. Aangezien de punten van het beeld van P in 1-1 verband moeten staan met hun volledige originelen, corresponderen hier blijkens (6.3) de punten van PR precies met de lineaire variëteiten x+N voor alle $x \in R$. We komen er zo toe de lineaire ruimte S als volgt te definiëren, waarbij we er meteen voor zorgen dat S = PR wordt voor de nog te definiëren lineaire afbeelding P.

Vectoren van S zijn de lineaire variëteiten x+N voor $x \in R$. Optelling in S wordt gedefinieerd door

$$(x+N) + (y+N) = (x+y) + N.$$

Hier zitten enige haken en ogen, te weten: als x+N = x'+N en

$y+N = y'+N$, is dan ook $(x+y)+N = (x'+y')+N$? We rekenen het even na:

$x'-x \in N$ en $y'-y \in N$, dus $(x'+y') - (x+y) = x'-x+y'-y \in N$.

Daaruit volgt inderdaad dat $(x+y) + N = (x'+y') + N$, m.a.w. de definitie van optelling is ondubbelzinnig. Scalaire vermenigvuldiging gaat net zo:

$\lambda(x+N) = \lambda x + N$.

Voor $x+N = x'+N$ is $x'-x \in N$, dus $\lambda x'-\lambda x = \lambda(x'-x) \in N$, derhalve $\lambda x'+N = \lambda x+N$. Ook hier dus weer een ondubbelzinnige definitie. Het is nu een kleinigheid de axioma's voor een lineaire ruimte te verifieren in S. We vermelden alleen dat het nulelement van S is: $o+N = N$, en de tegengestelde is: $-(x+N) = (-x) + N$.

De zo gedefinieerde lineaire ruimte noemen we de <u>factorruimte van R naar N</u>, of <u>R-modulo N</u>, afgekort als R/N of R mod N.

Beschouw nu de afbeelding

$P : R \to R/N$

gedefinieerd door

$Px = x+N$.

Uit de definitie van optelling en scalaire vermenigvuldiging in R/N volgt direct dat P een lineaire afbeelding van R op R/N is. Wat is de nulruimte van P?

$Px = o \Leftrightarrow x+N = N \Leftrightarrow x \in N$.

De gezochte nulruimte is dus precies N.

Is $A : R \to T$ een lineaire afbeelding, zodat N bevat is in de nulruimte van A (d.w.z. $AN = o$), dan definiëren we $A_N : R/N \to T$ door

$A_N(x+N) = Ax$.

Is $x+N = y+N$, dan $x-y \in N$, dus $Ax-Ay = 0$, m.a.w. $A_N(x+N) = A_N(y+N)$. A_N is dus goed gedefinieerd. We zeggen dat A gefactoriseerd is via R/N, of via P; er geldt nl. $A = A_N P$. Veronderstel nu in het bijzonder dat $A : R \to T$ een lineaire afbeelding van R op T is met nulruimte N. De bijbehorende $A_N : R/N \to T$ is dan 1-1, want

$$A_N(x+N) = A_N(y+N) \Leftrightarrow Ax = Ay \Leftrightarrow x-y \in N \Leftrightarrow x+N = y+N.$$

Verder is ook A_N een afbeelding op, dus A_N is een isomorfisme van R/N met T.

STELLING. Zij R een lineaire ruimte en N een deelruimte van R. Dan geldt:

(i) Er is een lineaire afbeelding met nulruimte N, nl.

$$P : R \to R/N$$

gedefinieerd door $Px = x+N$. P heet de projectie van R op R/N.

(ii) Is $A : R \to T$ een lineaire afbeelding zodat $AN = 0$, dan is er precies één lineaire afbeelding $A_N : R/N \to T$ zodat $A_N(x+N) = Ax$ voor $x \in R$, d.w.z. $A = A_N P$.

(iii) Is A een lineaire afbeelding van R op T met nulruimte N, dan is A_N als in (ii) een isomorfisme van R/N op T (eerste isomorfiestelling).

(iv) Is L een deelruimte van R met $L \subseteq N$, dan is

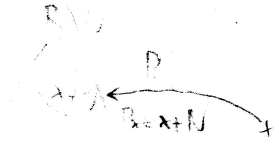
$$R/N \cong (R/L)/(N/L)$$

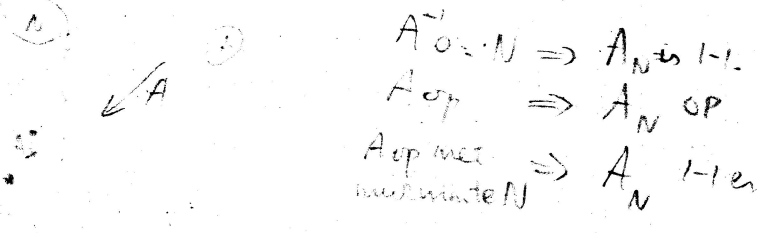
(tweede isomorfiestelling).

Bewijs. (i) t/m (iii) hebben we al bewezen. Wat (iv) betreft, de lineaire afbeelding

$$B : R/L \to R/N$$

met





$B(x+L) = x+N$

(waarom is dit ondubbelzinnig gedefinieerd?) heeft als nulruimte precies N/L. Uit (iii) volgt derhalve de gezochte isomorfie.

(6.5) DEFINITIE. De rang van een lineaire afbeelding $A : R \to S$ is de dimensie van z'n beeldruimte AR.

Zij $A : R \to S$ een lineaire afbeelding. Kies bases in R en S. De beelden van de basisvectoren van R zijn, in coördinaten uitgeschreven, precies de kolommen van de matrix van A, en deze brengen de beeldruimte voort. De rang van A is dus gelijk aan het maximale aantal lineair onafhankelijke kolommen in de matrix van A; met dat laatste houden we ons nu verder bezig.

(6.6) DEFINITIE. Is A een matrix, dan heet het maximale aantal lineair onafhankelijke kolommen van A de kolommenrang van A. Het maximale aantal lineair onafhankelijke rijen heet de rijenrang van A.

We zullen verderop zien dat voor iedere matrix geldt: kolommenrang = rijenrang.

LEMMA. De kolommenrang en de rijenrang van een matrix veranderen niet bij elk van de volgende bewerkingen.

1^0. Bij een kolom een lineaire combinatie van de andere kolommen optellen.

2^0. Bij een rij een lineaire combinatie van de andere rijen optellen.

3^0. Het permuteren van de rijen of van de kolommen.

Bewijs. We leveren het bewijs voor de kolommenrang; voor de rijenrang gaat het net zo. Zij $A = (\alpha_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant s}}$.

1^0. Het is voldoende het geval te beschouwen, dat we bij een kolom, zeg de eerste, een veelvoud van een andere, zeg de tweede, kolom optellen. Vat de kolommen op als vectoren $x_1, x_2, \ldots, x_s$ in de lineaire ruimte k^r. De kolommenrang van A is de dimensie van de lineaire deelruimte $<x_1> + <x_2> + \ldots + <x_s>$ van k^r. De bewering 1^0 volgt dus uit de volgende bewering:

(*) $<x_1> + <x_2> + \ldots + <x_s> = <x_1 + \lambda x_2> + <x_2> + \ldots + <x_s>$.

Dit zien we nu als volgt in. De inclusie

$$<x_1 + x_2> + <x_2> + \ldots + <x_s> \subset <x_1> + <x_2> + \ldots + <x_s>$$

is duidelijk. Stel omgekeerd $y \in <x_1> + <x_2> + \ldots + <x_s>$, dan is

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_s x_s$$
$$= \alpha_1 (x_1 + \lambda x_2) + (\alpha_2 - \alpha_1 \lambda) x_2 + \ldots + \alpha_s x_s.$$

Dus $y \in <x_1 + \lambda x_2> + <x_2> + \ldots + <x_s>$. Dit levert de omgekeerde inclusierelatie, en daarmee (*).

2^0. We hoeven weer alleen het geval te beschouwen, dat we bij de eerste rij een μ-voud van de tweede rij optellen. Elke lineaire relatie tussen een stel kolommen,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha_{1j_1} \\ \alpha_{2j_1} \\ \vdots \\ \alpha_{rj_1} \end{pmatrix} + \ldots\ldots + \lambda_t \begin{pmatrix} \alpha_{1j_t} \\ \alpha_{2j_t} \\ \vdots \\ \alpha_{rj_t} \end{pmatrix} = 0$$

levert een relatie met dezelfde coëfficienten, nadat we bij de eerste rij het μ-voud van de tweede rij hebben opgeteld:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha_{1j_1}+\mu\alpha_{2j_1} \\ \alpha_{2j_1} \\ \vdots \\ \alpha_{rj_1} \end{pmatrix} + \ldots\ldots + \lambda_t \begin{pmatrix} \alpha_{1j_t}+\mu\alpha_{2j_t} \\ \alpha_{2j_t} \\ \vdots \\ \alpha_{rj_t} \end{pmatrix} = o,$$

en omgekeerd; ga dit na! Daaruit volgt dat het maximale aantal lineair onafhankelijke kolommen, d.i. de kolommenrang, niet verandert.

3^0. Het is duidelijk dat permuteren van de kolommen niets verandert aan de kolommenrang. Permuteren van de rijen behoudt alle eventuele lineaire afhankelijkheidsrelaties tussen de kolommen (net als in het bewijs van 2^0), dus verandert ook al niets aan de kolommenrang.

Het belang van bovenstaand lemma is daarin gelegen, dat we, bij de berekening van de kolommenrang (of rijenrang) van een matrix, de zaak eerst kunnen vereenvoudigen door te gaan vegen, zoals we dat ook gedaan hebben bij de berekening van determinanten. Duiden we met $\sim$ aan, dat twee matrices dezelfde rijenrang hebben, dan vinden we bijvoorbeeld door vegen met kolommen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aan deze laatste matrix is duidelijk dat de kolommenrang 2 bedraagt.

(6.7) DEFINITIE. Is A een $r \times s$-matrix, dan verstaan we onder een $t \times u$-deelmatrix van A, waarbij $1 \leqslant t \leqslant r$, $1 \leqslant u \leqslant s$, een matrix die we krijgen door $r-t$ rijen en $s-u$ kolommen uit A te schrappen.

Een n × n-onderdeterminant van A is de determinant van een n × n-deelmatrix van A, voor $1 \leq n \leq r,s$. We noemen n de orde van een n × n-onderdeterminant.

Is bijvoorbeeld $A = (\alpha_{ij})$ een 3 × 3-matrix, dan is $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ een 2 × 2-deelmatrix, $(\alpha_{31} \ \alpha_{32} \ \alpha_{33})$ een 1 × 3-deelmatrix, en $\begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$ een onderdeterminant van orde 2.

(6.8) STELLING. Zij A een r × s-matrix (α_{ij}).

(i) Rijenrang van A = kolommenrang van A = maximale orde van een onderdeterminant $\neq 0$ van A.

De gemeenschappelijke waarde van deze grootheden noemen we de rang van A.

(ii) De rang van A is $\leq r$ en $\leq s$.

(iii) rang A = rang A' (A' = gespiegelde van A).

(iv) De rang van A verandert niet bij permuteren van rijen of kolommen, en bij het optellen bij een rij (kolom) van een lineaire combinatie van de andere rijen (resp. kolommen).

Bewijs. (i) Noem de kolommenrang d, de rijenrang e, en de maximale orde van een onderdeterminant, die $\neq 0$ is, t. Na permuteren van de kolommen mogen we aannemen, dat de eerste d kolommen van A lineair onafhankelijk zijn. De eerste kolom is dan $\neq o$, dus er is een $\alpha_{1j} \neq 0$; na permuteren van de rijen mogen we aannemen dat $\alpha_{11} \neq 0$. Door van de i-de rij $\alpha_{11}^{-1}\alpha_{1i}$ maal de eerste rij af te trekken, bereiken we dat $\alpha_{1i} = 0$ voor $i > 1$. In de tweede kolom is er een $\alpha_{2j} \neq 0$ met $j > 1$, omdat de eerste twee kolommen lineair onafhankelijk zijn. Door de 2-de en de j-de rij te verwisselen, bereiken we dat $\alpha_{22} \neq 0$.

Door nu met de 2-de rij te gaan vegen (net als boven), bereiken we dat $\alpha_{2i} = 0$ voor $i \neq 2$. Zo gaan we verder met de 3-de t/m de d-de kolom. Daarmee brengen we A in de gedaante

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_d & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \text{met } \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_d \neq 0.$$

Nu is echter duidelijk dat de eerste d rijen lineair onafhankelijk zijn, dus $e \geqslant d$. Analoog bewijst men (met verwisseling van rijen en kolommen in bovenstaand betoog), dat $d \geqslant e$, en daarmee hebben we $d = e$.

Beschouw nu weer A in z'n oorspronkelijke gedaante. Na permuteren van de rijen mogen we aannemen dat de eerste d rijen van A lineair onafhankelijk zijn. De matrix

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{d1} & \cdots & \alpha_{dn} \end{pmatrix}$$

heeft dus ook rijen rang d. We mogen (na permuteren) de eerste d kolommen van B lineair onafhankelijk veronderstellen, omdat rijenrang = kolommenrang. Maar dan is de onderdeterminant van de eerste d kolommen in B niet nul:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{d1} & \cdots & \alpha_{dd} \end{vmatrix} \neq 0.$$

In A is er dus een d × d-onderdeterminant $\neq 0$, d.w.z. $t \geqslant d$. Omgekeerd kunnen we door permuteren van de rijen en kolommen van A bereiken, dat

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{t1} & \cdots & \alpha_{tt} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Omdat dus de kolommen van de matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{t1} & \cdots & \alpha_{tt} \end{pmatrix}$$

lineair onafhankelijk zijn, zijn ook de eerste t kolommen van A lineair onafhankelijk. Dit laat zien dat $d \geqslant t$, en daarmee $t = d$.

(ii) Dit is duidelijk.

(iii) Bij spiegelen gaan de rijen van A over in de kolommen van A! Dus de rijenrang van A = kolommenrang van A'.

(iv) Dit volgt direct uit lemma (6.6).

§7. LINEAIRE VERGELIJKINGEN.

We werpen ons nu op een zeer belangrijk onderwerp uit de lineaire algebra, te weten het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen.

(7.1) We bekijken het stelsel van t lineaire vergelijkingen in n onbekenden $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$(*)\qquad \begin{aligned} &\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ &\alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_{t1}\xi + \alpha_{t2}\xi + \ldots + \alpha_{tn}\xi_n = \beta_t \end{aligned}$$

Hierin zijn de α_{ij} en de β_j, $1 \leqslant i \leqslant t$, $1 \leqslant j \leqslant n$, gegeven coëfficienten uit $k = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, en we zoeken oplossingen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ in k. Om nu de theorie van de lineaire ruimten en de lineaire afbeeldingen op dit probleem te kunnen loslaten, vatten we $\xi_1, \ldots, \xi_n$ op als coördinaten van een vector x uit de rijtjesruimte k^n, en $\beta_1, \ldots, \beta_t$ als die van een vector b uit k^t. De <u>matrix</u> van het stelsel vergelijkingen,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{t1} & \alpha_{t2} & \ldots & \alpha_{tn} \end{pmatrix}$$

interpreteren we als matrix van een lineaire afbeelding

$$A : k^n \to k^t.$$

Het stelsel vergelijkingen (*) kunnen we dan kortweg opschrijven in de vorm

(**) $Ax = b$.

(7.2) De eerste vraag die we onderzoeken is: wanneer heeft (**) een oplossing? Noodzakelijk en voldoende voor het bestaan van een oplossing is: $b \in Ak^n$. Een basis van Ak^n krijgt men door een maximaal stel lineair onafhankelijke kolommen van A te nemen. Dus $b \in Ak^n$ is equivalent met: b is lineair afhankelijk van de kolommen van A, of ook met: de rang van de uitgebreide matrix van het stelsel vergelijkingen

$$(A|b) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{t1} & \dots & \alpha_{tn} & \beta_t \end{pmatrix}$$

is hetzelfde als de rang van A (waarom?).

Stel nu dat (**) een oplossing x heeft. De verzameling van alle mogelijke oplossingen y is dan $A^{-1}(Ax) = x+N$. Hierin is N de nulruimte van A, d.w.z. de lineaire ruimte bestaande uit de oplossingen van de vergelijking

$$Ax = o.$$

DEFINITIE. Het stelsel lineaire vergelijkingen

$$Ax = o,$$

d.w.z.

$$\alpha_{11}\xi_1 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_{t1}\xi_1 + \dots + \alpha_{tn}\xi_n = 0$$

heet het homogene stelsel behorende bij het inhomogene stelsel

$$Ax = b,$$

d.w.z.

$$\alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{t1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{tn}\xi_n = \beta_t.$$

Algemeen noemen we een stelsel

$$Ax = b$$

homogeen als $b = o$, inhomogeen als $b \neq o$ (of als we niet weten of b wel of niet nul is).

Stel nu, $Ax = b$ heeft precies één oplossing x. Dan moet dus $N = o$ zijn, en A moet dezelfde rang hebben als $(A|b)$. Omgekeerd volgt uit de laatste twee beweringen, dat $Ax = b$ precies één oplossing heeft. Wanneer A een $n \times n$-matrix is, dan is $N = o$ equivalent met $\det A \neq 0$; in dat geval is A surjectief, dus is zeker $b \in Ak^n$, m.a.w. rang $(A|b)$ = rang A.

We vatten de resultaten over de oplossingen van (**) samen in de volgende

STELLING. Het stelsel lineaire vergelijkingen

$$Ax = b$$

heeft dan en slechts dan een oplossing $x \in k^n$ als $b \in Ak^n$, d.i. als b lineair afhankelijk is van de kolommen van A. Equivalent hiermee is: de rang van de uitgebreide matrix $(A|b)$ is hetzelfde als de rang van A; we noemen dat dan de rang van het stelsel vergelijkingen. Is x een oplossing van $Ax = b$, dan krijgt men iedere andere oplossing door bij x een willekeurige oplossing y van het bijbehorende homogene stelsel $Ay = o$ op te tellen; de oplossingsverzameling van $Ax = b$ is dus $x+N, N = A^{-1}o$. In het bijzonder geldt: $Ax = b$ heeft precies één oplossing dan en slechts dan als het homogene stelsel $Ay = o$ alleen de nuloplossing $y = o$ heeft en rang $(A|b)$ = rang A. Is A een $n \times n$-matrix,

dan geldt zelfs: Ax = b heeft precies één oplossing dan en slechts dan als het homogene stelsel Ay = o alleen de nuloplossing heeft, d.w.z. als det A ≠ 0.

(7.3) We gaan nu eerst (**) oplossen in het speciale geval dat t = n en det A ≠ 0. We hebben al gezien dat er dan precies één oplossing voor Ax = b is, te weten

$$x = A^{-1}b.$$

De matrix van A^{-1} hebben we in (5.9) uitgerekend: $A^{-1} = (\beta_{ij})$ met

$$\beta_{ij} = (\det A)^{-1} D_{ji},$$

waarin $D_{ji} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$, A_{ji} de submatrix van α_{ji} in A. Daaruit volgt

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\beta_j$$

$$= (\det A)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{ji}.$$

Nu is $\sum_{j=1}^{n} \beta_j D_{ji}$ kennelijk de ontwikkeling naar de i-de kolom van de determinant van de matrix

$$A_i(b) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,i-1} & \beta_1 & \alpha_{1,i+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,i-1} & \beta_n & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Dus

$$\xi_i = (\det A)^{-1} \det A_i(b).$$

Daarmee is de oplossing x berekend.

STELLING. Is A een n × n-matrix met det A ≠ 0, en $b \in k^n$, dan heeft het stelsel lineaire vergelijkingen

Ax = b

precies één oplossing $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in k^n$, nl. met

$\xi_i = (\det A)^{-1} \det A_i(b)$,

waar $A_i(b)$ de matrix is die men uit A verkrijgt door de i-de kolom te vervangen door de vector $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$:

$$A_i(b) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,i-1} & \beta_1 & \alpha_{1,i+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,i-1} & \beta_n & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Deze oplossingsmethode staat bekend als de regel van Cramer.

(7.4) We bekijken nu een willekeurig inhomogeen stelsel van t vergelijkingen in n onbekenden

(**) $Ax = b$.

We nemen aan dat er een oplossing is, dus dat de rang van de uitgebreide matrix $(A|b)$ hetzelfde is als die van A; noem deze rang r. Het is duidelijk dat $r \leqslant n$ en $r \leqslant t$. Stel dat $r < t$. Na eventueel verwisselen van de volgorde van de vergelijkingen, mogen we aannemen dat de eerste r rijen van A (en dus ook van $(A|b)$) lineair onafhankelijk zijn. Stel nu, $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ is een oplossing van de eerste r vergelijkingen:

$$\alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{r1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{rn}\xi_n = \beta_r.$$

We beweren dat x dan ook voldoet aan de laatste t-r vergelijkingen van (**). Omdat nl. de eerste r rijen van $(A|b)$ een basis vormen van álle rijen, geldt voor elke j, $r < j \leqslant t$:

$$(\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn}, \beta_j) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji}(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}, \beta_i).$$

Dus

$$\begin{aligned} \alpha_{j1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{jn}\xi_n &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji}(\alpha_{i1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{in}\xi_n) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_{ji}\beta_i \\ &= \beta_j, \end{aligned}$$

waaruit inderdaad blijkt dat x aan de j-de vergelijking voldoet. We kunnen dus zonder bezwaar de laatste t-r vergelijkingen schrappen, m.a.w., we mogen aannemen dat t = r = de rang van A. Na eventueel de kolommen van A verwisseld te hebben, wat neerkomt op een hernummering van de onbekenden $\xi_1,\ldots,\xi_n$, mogen we verder veronderstellen dat de eerste r kolommen van A lineair. onafhankelijk zijn. De overige kolommen van A, en ook b, zijn daar dan lineair afhankelijk van. Eén oplossing krijgen we nu als volgt. Bekijk het stelsel

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1r}\xi_r &= \beta_1 \\ &\vdots \\ \alpha_{r1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{rr}\xi_r &= \beta_r. \end{aligned}$$

Omdat de matrix hiervan rang r heeft, is de determinant $|\alpha_{ij}|_{1\leq i,j\leq r} \neq 0$, dus is er precies één oplossing $(\xi_1,\ldots,\xi_r)$, die we bijvoorbeeld met de regel van Cramer kunnen berekenen (maar ook met Gauss-eliminatie, zie verderop). Maar dan is

$$x = (\xi_1,\ldots,\xi_r,0,\ldots,0)$$

een oplossing van het stelsel (**): Ax = b. Om nu de volledige oplossing hiervan te bepalen, is het voldoende de nulruimte N te vinden, d.i. de oplossing van het homogene stelsel van r vergelijkingen in n onbekenden

(#) $Ax = o$.

A heeft rang r, dus

$$\begin{aligned} \dim N &= \dim k^n - \dim Ak^n \\ &= n - r. \end{aligned}$$

Als we n-r lineair onafhankelijke oplossingen van (#) kunnen vinden, d.w.z. een basis van N, dan is iedere oplossing van (#) op precies één manier als lineaire combinatie daarvan te schrijven. Deze n-r onafhankelijke oplossingen vinden we als volgt. We schrijven de vergelijkingen in de vorm

$$\alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1r}\xi_r = -\alpha_{1,r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \alpha_{1,n}\xi_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{r1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{rr}\xi_r = -\alpha_{r,r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \alpha_{r,n}\xi_n.$$

Vanwege de lineaire onafhankelijkheid van de eerste r kolommen van A kunnen we bij iedere keuze van $\xi_{r+1},\ldots,\xi_n$ precies één oplossing $\xi_1,\ldots,\xi_r$ van dit stelsel vinden, bijvoorbeeld met de regel van Cramer of door Gauss-eliminatie. Neem nu eerst $\xi_{r+1} = 1$, $\xi_{r+2} = \ldots = \xi_n = 0$; de waarden van $\xi_1,\ldots,\xi_r$ die we daarbij vinden noemen we $\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_r^{(1)}$. Analoog vinden we voor $\xi_{r+j} = 1$, $\xi_{r+1} = \ldots = \xi_{r+j-1} = \xi_{r+j+1} = \ldots = \xi_n = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n-r)$ een oplossing $\xi_1^{(j)},\ldots,\xi_r^{(j)}$. We hebben op deze manier n-r oplossingen van (#) gevonden, nl.

$x^{(j)} = (\xi_1^{(j)},\ldots,\xi_r^{(j)},0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ met 1 op de (r+j)-de plaats.

Het is duidelijk dat $x^{(1)},\ldots,x^{(n-r)}$ lineair onafhankelijk zijn (waarom?), dus ze vormen een basis van N. Daarmee is de oplossing compleet. We vatten de resultaten van deze sectie als volgt samen.

STELLING. Gegeven t lineaire vergelijkingen in n onbekenden

(1) $Ax = b$

met $x = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $A = (\alpha_{ij})$ en $b = (\beta_1,\ldots,\beta_t)$. We nemen aan dat A en de uitgebreide matrix $(A|b)$ dezelfde rang hebben (anders is er geen oplossing); noem deze rang r. Na omnummeren van de rijen van $(A|b)$ en de kolommen van A mogen we aannemen dat de eerste r rijen en de eerste r kolommen lineair onafhankelijk zijn.

1^0. Schrap de laatste t-r vergelijkingen weg - die zijn lineair afhankelijk van de eerste r.

2^0. Bepaal de oplossing $x' = (\xi_1^{(0)},\ldots,\xi_r^{(0)})$ van het stelsel

$$\alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1r}\xi_r = \beta_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{r1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{rr}\xi_r = \beta_r$$

(Dit stelsel heeft precies één oplossing). $x^{(0)} = (\xi_1^{(0)},\ldots,\xi_r^{(0)},0,\ldots,0)$ is dan een oplossing van (1). Als b = o, dan is uiteraard $x^{(0)}$ = o, dus dan kan deze stap vervallen.

3°. Bepaal n-r lineair onafhankelijke oplossingen van het homogene stelsel

(2) Ax = o.

Deze kan men als volgt verkrijgen: neem $\xi_{r+j} = 1, \xi_{r+1} = \ldots = \xi_{r+j-1} = \xi_{r+j+1} = \ldots = \xi_n = 0$, dan is er precies één oplossing $x^{(j)} = (\xi_1^{(j)},\ldots,\xi_r^{(j)},0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ van (2), die men bepaalt uit de vergelijkingen

$$\alpha_{11}\xi_1^{(j)} + \ldots + \alpha_{1r}\xi_r^{(j)} = -\alpha_{1j}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{r1}\xi_1^{(j)} + \ldots + \alpha_{rr}\xi_r^{(j)} = -\alpha_{rj}.$$

$x^{(1)},\ldots,x^{(n-r)}$ vormen een basis van de oplossingen van (2).

Men kan ook de vergelijkingen

$$\alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1r}\xi_r = -\alpha_{1,r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \alpha_{1n}\xi_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{r1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{rr}\xi_r = -\alpha_{r,r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \alpha_{rn}\xi_n$$

oplossen, waarin we $\xi_{r+1},\ldots,\xi_n$ opvatten als parameters met (vaste maar willekeurig gekozen) waarden in k, en $\xi_1,\ldots,\xi_r$ als onbekenden. Men krijgt dan meteen de meest algemene oplossing van (2), met daarin $\xi_{r+1},\ldots,\xi_n$ als parameters, te weten $\xi_{r+1}\,x^{(1)} + \ldots + \xi_n\,x^{(n-r)}$.

4°. Een willekeurige oplossing van het inhomogene stelsel (1) is op precies één manier te schrijven als

$x = x^{(0)} + \lambda_1 x^{(1)} + \ldots + \lambda_{n-r} x^{(n-r)}$, $\lambda_i \in k$.

Deze oplossingen vormen een (n-r)-dimensionale lineaire variëteit evenwijdig met de nulruimte van A.

(7.5) Uit het vorenstaande is duidelijk dat we in principe elk oplosbaar stelsel lineaire vergelijkingen kunnen oplossen door één of meer keren de regel van Cramer toe te passen. Een bezwaar daarvan is de gecompliceerdheid van de berekeningen: om de oplossing van n vergelijkingen in n onbekenden

$$Ax = b$$

met $\det A \neq 0$ te bepalen, moeten we n+1 determinanten, elk van de orde n, uitrekenen! Wil men niet een oplossing in de vorm van een algemene formule, zoals de regel van Cramer die geeft, maar wil men bijvoorbeeld een stelsel met expliciet gegeven waarden van alle coëfficienten α_{ij} en β_i oplossen, dan is het veelal eenvoudiger te werk te gaan met de zogenaamde Gauss-eliminatie. We beschrijven deze in stappen.

Gegeven een willekeurig stelsel van t lineaire vergelijkingen in n onbekenden:

(1) $Ax = b$,

met $A = (\alpha_{ij})$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$, $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Als A en de uitgebreide matrix $(A|b)$ dezelfde rang hebben (hoe we dit verifiëren zullen we straks zien), dan kunnen we een vergelijking, die lineair afhankelijk is van de andere vergelijkingen, zonder bezwaar wegschrappen, zoals we in (7.4) gezien hebben. Algemener: er verandert niets aan de oplossing van het stelsel (1), als we bij de i-de rij van de matrix $(A|b)$ een lineaire combinatie van

de andere rijen optellen. Voldoet nl. $x = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ aan (1), dan is

$$(\alpha_{i,1} + \sum_{j\neq i} \lambda_j\alpha_{j,1})\xi_1 + \ldots + (\alpha_{i,n} + \sum_{j\neq i} \lambda_j\alpha_{j,n})\xi_n =$$

$$= \alpha_{i,1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{i,n}\xi_n + \sum_{j\neq i} \lambda_j(\alpha_{j,1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{j,n}\xi_n)$$

$$= \beta_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j\beta_j.$$

Voldoet omgekeerd x aan de vergelijkingen

$$\alpha_{1,1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1,n}\xi_n = \beta_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\alpha_{i,1} + \sum_{j\neq i} \lambda_j\alpha_{j,1})\xi_1 + \ldots + (\alpha_{i,n} + \sum_{j\neq i} \lambda_j\alpha_{j,n})\xi_n = \beta_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j\beta_j$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{t,1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{t,n}\xi_n = \beta_t$$

dan voldoet hij ook aan (1). Dit stelt ons in staat om met de rijen van A te gaan vegen. We doen dit als volgt.

Is $\alpha_{1,j} = 0$ voor alle $j = 1,\ldots,n$ en $\beta_1 \neq 0$, dan is het stelsel niet oplosbaar; zijn alle $\alpha_{1,j} = 0$ en $\beta_1 = 0$, dan kunnen we de eerste vergelijking weglaten. Stel nu dat er een j is met $\alpha_{1,j} \neq 0$. Door van de overige vergelijkingen een geschikt veelvoud van de eerste af te trekken, kunnen we $\alpha_{2,j},\ldots,\alpha_{t,j}$ nul maken. We moeten daartoe van de i-de vergelijking $\alpha_{i,j}\,\alpha_{1,j}^{-1}$ maal de eerste vergelijking aftrekken (ook de rechterleden $\beta_1,\ldots,\beta_t$ daarmee meenemen!) Is in het zo verkregen stelsel

$$A'x = b'$$

één van de rijen no. 2 t/m t van A nog niet lineair afhankelijk van de eerste rij, dan herhalen we daarmee de voorgaande procedure, waarbij we de eerste vergelijking met rust laten. Na eindig veel van dergelijke stappen, kunnen we niet verder. Na eventueel verwisselen van de kolommen, krijgen we een stel lineaire

vergelijkingen van de volgende gedaante, dat equivalent is met het oorspronkelijke stelsel (1):

$$\begin{aligned}
&\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \ldots + \gamma_{1n}\xi_n = \delta_1\\
&\qquad\gamma_{22}\xi_2 + \ldots + \gamma_{2n}\xi_n = \delta_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\gamma_{rr}\xi_r + \ldots + \gamma_{rn}\xi_n = \delta_r \qquad (2)\\
&0.\xi_1 + 0.\xi_2 + \ldots + 0.\xi_n = \delta_{r+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&0.\xi_1 + 0.\xi_2 + \ldots + 0.\xi_n = \delta_t
\end{aligned}$$

met alle $\gamma_{ii} \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant r$. We korten dit af als

$$Cx = d.$$

Kennelijk is r dan de rang van C. Nu twee mogelijkheden:

(a) Er is een j, $r < j \leqslant t$, met $\delta_j \neq 0$. Dan krijgen we een strijdige vergelijking:

$$0 = \delta_j,$$

dus dan is er geen oplossing mogelijk. Men ziet ook dat de uitgebreide matrix $(C|d)$ een grotere rang heeft dan C, omdat het rechterlid d niet lineair afhankelijk is van de kolommen van C (waarom niet ?).

(b) $\delta_{r+1} = \ldots = \delta_t = 0$. De vector d is dan lineair afhankelijk van de eerste r kolommen van C, en het stelsel is oplosbaar. We nemen $\xi_{r+1},\ldots,\xi_n$ als (vrij te kiezen) parameters. ξ_r volgt dan uit

$$\gamma_{rr}\xi_r = \delta_r - \gamma_{r,r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \gamma_{r,n}\xi_n,$$

wegens $\gamma_{rr} \neq 0$. Vervolgens berekent men ξ_{r-1} uit

$$\gamma_{r-1,r-1}\xi_{r-1} = \delta_{r-1} - \gamma_{r-1,r}\xi_r - \gamma_{r-1,r+1}\xi_{r+1} - \ldots - \gamma_{r-1,n}\xi_n$$

en zo verder tot en met ξ_1. Op deze manier heeft men direct de meest algemene oplossing te pakken.

§8. INPRODUCT.

We gaan ons nu uitvoerig bezighouden met het inproduct in een lineaire ruimte. In deze paragraaf zijn alle te beschouwen lineaire ruimten reëel, d.w.z. $k = \mathbb{R}$. Aanvankelijk mag de dimensie willekeurig zijn, later alleen maar eindig.

(8.1) DEFINITIE. Zij R een reële lineaire ruimte, van willekeurige dimensie. Onder een inproduct (of inwendig product) in R verstaat men een reële functie van twee variabelen uit R, genoteerd als (x,y) voor x en $y \in R$, of ook wel $(\ , \ )$, met de volgende eigenschappen:

1. $(\ , \ )$ is bilineair, d.w.z. voor vaste y is (x,y) een lineaire functie in x, voor vaste x een lineaire functie in y. Uitgeschreven:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 , y) = \lambda_1 (x_1 , y) + \lambda_2 (x_2 , y)$$

$$(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \mu_1 (x, y_1) + \mu_2 (x, y_2).$$

2. $(\ , \ )$ is symmetrisch: $(x,y) = (y,x)$.

3. $(\ , \ )$ is positief definitiet: $(x,x) > 0$ voor $x \neq 0$.

Merk op dat de lineariteit van (x,y) in y al volgt uit de lineariteit in x en de symmetrie. Een lineaire ruimte waarop een inproduct is gedefinieerd, heet een ruimte met inproduct.

Voorbeelden van ruimten met inproduct.

1. In $\mathbb{R}^n$ definiëren we, voor $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ en $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$,

$$(x,y) := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i .$$

Ga na dat aan alle eisen voldaan is. We noemen dit het standaard-inproduct in $\mathbb{R}^n$. Algemener: Is R een eindig-dimensionale lineaire

ruimte over $\mathbb{R}$ en $e_1,\ldots,e_n$ een basis van R, dan is het <u>standaardinproduct van R t.o.v. deze basis</u> gedefinieerd door

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$$

als $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ en $y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$.

2. Beschouw de lineaire ruimte $\mathbb{R}^\infty$ van oneindige rijtjes $(\xi_1,\xi_2,\ldots)$, $\xi_i \in \mathbb{R}$, met in elk rijtje slechts eindig veel $\xi_i \neq 0$, met coördinaatsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging (zie (2.15)). Daarin definiëren we een inproduct als volgt: voor $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots)$ en $y = (\eta_1,\eta_2,\ldots)$ is

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i.$$

Merk op dat slechts eindig veel summanden $\xi_i\eta_i$ ongelijk nul zijn, dus staat hier in feite een eindige som. Verifieer zelf de axioma's van het inproduct voor dit geval.

3. R is de lineaire ruimte van alle reële continue functies op het segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, met optelling en reële scalaire vermenigvuldiging als in (2.16). In deze ruimte definiëren we een inproduct door

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \text{ voor } f,g \in R.$$

Bewijs dat aan de eisen voor een inproduct voldaan is.

Is R een ruimte met inproduct $(\ ,\ )$, en is L een lineaire deelruimte van R, dan is L met de restrictie van $(\ ,\ )$ tot L kennelijk ook een ruimte met inproduct.

(8.2) <u>DEFINITIE</u>. Zij R een ruimte met inproduct. Twee vectoren x en y uit R heten <u>loodrecht</u> of <u>orthogonaal</u>, als $(x,y) = 0$. Notatie: $x \perp y$. Twee deelverzamelingen S en T van R heten <u>loodrecht op elkaar</u>, notatie $S \perp T$, wanneer $x \perp y$ voor alle $x \in S$ en $y \in T$.

Is V een deelverzameling van R, dan is het orthogonale complement (of orthocomplement) van V de verzameling van alle $x \in R$ met $x \perp V$:

$$V^{\perp} = \{x \in R \mid x \perp y \text{ voor alle } y \in V\}.$$

Uit de symmetrie van het inproduct volgt dat $\perp$ een symmetrische relatie is: $x \perp y$ impliceert $y \perp x$. Uit eis 3 voor inproducten volgt dat $x \perp x$ alleen kan voor $x = o$. Uit de lineariteit van het inproduct volgt

$$(o,x) = (0.o,x) = 0(o,x) = 0,$$

dus $o \perp R$. Is omgekeerd $x \perp R$, dan in het bijzonder $x \perp x$, dus $x = o$.

Opmerking. Twee vlakken V en W door o in IR^3 met inproduct, die loodrecht heten volgens de bij het V.W.O. gangbare definitie, heten in onze terminologie niet loodrecht op elkaar. Daarvoor geldt nl.: er is een vector $x \neq 0$, $x \in V$ met $x \perp W$, maar niet alle $y \in V$ staan loodrecht op W.

(8.3) DEFINITIE. In een ruimte R met inproduct is de lengte van een vector x gedefinieerd door

$$|x| = \sqrt{(x,x)}.$$

Voor x en $y \in R$ is hun afstand gedefinieerd door

$$d(x,y) = |x-y|.$$

STELLING. (i) Voor $x \neq o$ is $|x| > 0$, $|o| = 0$.

(ii) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ voor $\lambda \in IR$.

(iii) $|(x,y)| \leq |x||y|$ (ongelijkheid van Schwarz).

$|(x,y)| = |x||y| \Leftrightarrow$ x en y zijn lineair afhankelijk.

(iv) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (driehoeksongelijkheid)

$|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x = o$ of $y = \lambda x$ met $\lambda \geq 0$

$\Leftrightarrow y = o$ of $x = \mu y$ met $\mu \geq 0$.

(v) $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ als $x \perp y$ (stelling van Pythagoras).

(vi) $d(x,x) = 0$, $d(x,y) > 0$ als $x \neq y$.

(vii) $d(x,y) = d(y,x)$.

(viii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (driehoeksongelijkheid).

$d(x,z) = d(x,y) + d(y,z) \Leftrightarrow x = y$ of $(z-y) = \lambda(y-x)$ met $\lambda \geq 0 \Leftrightarrow y = z$ of $y-x = \mu(z-y)$ met $\mu \geq 0$.

(ix) $d(y,z)^2 = d(x,y)^2 + d(x,z)^2$ als $y-x \perp z-x$ (stelling van Pythagoras).

Bewijs. (i) en (ii) laten we aan de lezer over.

(iii) Is $y = \lambda x$, dan is

$$|(x,y)| = |\lambda|(x,x) = |\lambda||x|^2 = |x||y|.$$

Analoog als $x = \mu y$. Neem nu aan dat x en y lineair onafhankelijk zijn. Voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ is dan $\lambda x+y \neq 0$, dus

$$(\lambda x+y, \lambda x+y) > 0.$$

$$\lambda^2(x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y) > 0 \text{ voor alle } \lambda.$$

De discriminant van deze kwadratische vorm in λ is dus < 0:

$$(x,y)^2 - (x,x)(y,y) < 0.$$

Hieruit volgt (iii) onmiddellijk.

(iv) $|x+y|^2 = (x+y,x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y)$

$\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$

$= (|x| + |y|)^2$.

Gelijkheid kan alleen optreden als $(x,y) = |x||y|$. Volgens (iii) moet dan $x = o$ of $y = \lambda x$ zijn. Dan is

$$(x,y) = \lambda(x,x) = \lambda|x|^2,$$

terwijl

$$|x||y| = |\lambda||x|^2,$$

dus moet $\lambda = |\lambda|$ als $x \neq o$, d.w.z. $\lambda \geqslant 0$. Het is duidelijk dat

$$x = o \text{ of } y = \lambda x \text{ met } \lambda \geqslant 0 \Leftrightarrow y = o \text{ of } x = \mu y \text{ met } \mu \geqslant 0.$$

(v) Als $x \perp y$, dan is

$$|x+y|^2 = (x+y,x+y) = (x,x) + (y,y) = |x|^2 + |y|^2,$$

omdat $(x,y) = 0$.

De uitpsraken (vi) t/m (ix) zijn een direct gevolg van (i) t/m (v).

(8.4) De ongelijkheid van Schwarz (stelling (8.3), (iii)) geeft ons de mogelijkheid de hoek tussen twee vectoren te definiëren. Voor $x \neq o$ en $y \neq o$ is nl.

$$\left|\frac{(x,y)}{|x||y|}\right| \leqslant 1.$$

De volgende definitie heeft dus zin.

DEFINITIE. In een ruimte met inproduct is de hoek ϕ tussen twee vectoren $x \neq o$ en $y \neq o$ gedefinieerd door

$$\cos \phi = \frac{(x,y)}{|x||y|}, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi.$$

Hierbij is $\cos \phi$ gedefinieerd als in de analyse, bijvoorbeeld door de reeks

$$\cos \phi = 1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \frac{\phi^6}{6!} + \ldots\ldots$$

Voor $x \perp y$ is $(x,y) = 0$ dus $\phi = \frac{\pi}{2}$, en omgekeerd. $\phi = 0$ betekent $\cos \phi = 1$, dus $y = \lambda x$ met $\lambda > 0$ (waarom?). $\phi = \pi$ is equivalent met $\cos \phi = -1$, dus $y = \lambda x$ met $\lambda < 0$ (waarom?).

(8.5) IN DE REST VAN DEZE PARAGRAAF HOUDEN WE ONS UITSLUITEND BEZIG MET EINDIG-DIMENSIONALE RUIMTEN MET INPRODUCT.

Opgemerkt moet worden dat sommige van de hierna te behandelen eigenschappen van zulke ruimten hun geldigheid behouden in oneindig-dimensionale ruimten met inproduct, eventueel in een ietwat gewijzigde vorm. Van andere eigenschappen blijft echter in oneindig veel dimensies weinig of niets over. De geïnteresseerde lezer zij verder verwezen naar de literatuur. .

STELLING. Is V een deelverzameling van een ruimte met inproduct R, dan is $V^{\perp}$ een lineaire deelruimte van R. Zijn V en W twee lineaire deelruimten van R, dan geldt:

(i) $\dim V + \dim V^{\perp} = \dim R$.

(ii) $R = V \oplus V^{\perp}$.

(iii) $V^{\perp\perp} = V$.

(iv) $(V+W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$.

(v) $(V \cap W)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp}$.

Bewijs. Zijn x en $y \in V^{\perp}$, dan is voor alle $z \in V$, $(x,z) = (y,z) = 0$, dus

$$(\lambda x+\mu y),z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z) = 0,$$

d.w.z. $\lambda x + \mu y \perp V$.

(i) Kies een basis $e_1,\ldots,e_d$ van V en breid die uit tot een basis $e_1,\ldots,e_n$ van R. $V^{\perp}$ bestaat uit de vectoren $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, waarvan de coördinaten $\xi_1,\ldots,\xi_n$ voldoen aan de homogene lineaire vergelijkingen

(*) $(e_i,x) = 0$ voor $i = 1,\ldots,d$.

De rang van dit stelsel is d, was dit nl. niet het geval, dan bestond er een niet-triviale lineaire relatie tussen de vergelijkingen, dus dan was

$$\lambda_1(e_1,x) + \ldots + \lambda_d(e_d,x) = 0$$

voor alle $x \in R$ (waarom precies?).

$(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_d e_d, x) = 0$ voor alle $x \in R$.

Dus $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_d e_d = o$, want dat is de enige vector $\perp R$. Daarmee komen we strijd met de lineaire onafhankelijkheid van $e_1, \ldots, e_d$. De oplossingsruimte $V^\perp$ van het stelsel (*) heeft dus dimensie = n-d, waaruit (i) volgt.

(ii) Stel $x \in V \cap V^\perp$, dan is $x \perp x$, dus $x = o$. Dus $V \cap V^\perp = o$. Omdat in dat geval

$$\dim (V \oplus V^\perp) = \dim V + \dim V^\perp = \dim R,$$

is dus $V \oplus V^\perp = R$.

(iii) Het is duidelijk dat $V \subseteq V^{\perp\perp} = (V^\perp)^\perp$. Door naar de dimensie te kijken, vinden we

$$\begin{aligned} \dim V^{\perp\perp} &= \dim R - \dim V^\perp \\ &= \dim R - (\dim R - \dim V) \\ &= \dim V, \end{aligned}$$

dus moet gelden $V = V^{\perp\perp}$.

(iv) Stel $x \perp V+W$, dan zeker $x \perp V$ en $x \perp W$, dus

$$(V+W)^\perp \subseteq V^\perp \cap W^\perp.$$

Is omgekeerd $x \in V^\perp \cap W^\perp$, en $u \in V+W$, dan is $u = y+z$ met $y \in V$ en $z \in W$, dus

$$(x,u) = (x,y) + (x,z) = 0.$$

Dus $V^\perp \cap W^\perp \subseteq (V+W)^\perp$.

Uit de twee tegengestelde inclusies volgt gelijkheid.

(v) $$\begin{aligned} (V \cap W)^\perp &= (V^{\perp\perp} \cap W^{\perp\perp})^\perp \\ &= (V^\perp + W^\perp)^{\perp\perp} \\ &= V^\perp + W^\perp. \end{aligned}$$

(8.6) Zij R een ruimte met inproduct, L een lineaire deelruimte en $x \in R$. Omdat $R = L \oplus L^\perp$, kunnen we x op precies één manier schrijven als

$x = y+z,\ y \in L,\ z \in L^{\perp}$.

y heet de <u>(loodrechte) projectie</u> van x op L. y is ook bepaald door de eisen

$y \in L,\ x-y \perp L$.

De afbeelding $\pi_L : R \to L$ gedefinieerd door

$\pi_L x = y\ (y \in L,\ x-y \perp L)$

noemen we de <u>(loodrechte) projectie</u> van R op L. Bewijs dat π_L een lineaire afbeelding is. Verder is $\pi_L x = x$ voor alle $x \in L$, dus $\pi_L^2 = \pi_L$.

Stel $a_1,\ldots,a_l$ is een basis van L. De projectie y van $x \in R$ op L kunnen we als volgt bepalen:

$$y = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i.$$

$(x-y,a_j) = 0$ voor $j = 1,\ldots,l$.

$$(x - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i, a_j) = 0.$$

$$(*)\quad \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (a_i,a_j) = (x,a_j),\ j = 1,\ldots,l.$$

We weten al dat (*) precies één oplossing $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ heeft. Dit volgt ook nog uit het feit dat de coëfficientenmatrix van het linkerlid van (*), d.i. de matrix $((a_i,a_j))_{1\leq i,j\leq l}$, determinant $\neq 0$ heeft, zoals volgt uit onderstaand lemma.

<u>LEMMA</u>. Zijn $a_1,\ldots,a_l$ lineair onafhankelijk in een ruimte R met inproduct R, dan is de determinant

$$|(a_i,a_j)|_{1\leq i,j\leq l} \neq 0.$$

<u>Bewijs</u>. De deelruimte opgespannen door $a_1,\ldots,a_l$ is ook een ruimte met inproduct. We mogen dus zonder bezwaar aannemen dat $a_1,\ldots,a_l$ een basis van R vormen.

Stel er bestaat een lineaire relatie tussen de kolommen van de matrix $((a_i,a_j))_{1\leq i,j\leq l}$:

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j(a_i,a_j) = 0, \quad i = 1,\ldots,l.$$

Dan is

$$(a_i, \sum_{j=1}^{l} \lambda_j a_j) = 0, \quad i = 1,\ldots,l.$$

De vector $\sum_{j=1}^{l} \lambda_j a_j$ staat loodrecht op een basis van R, dus op de hele R. Derhalve is

$$\sum_{j=1}^{l} \lambda_j a_j = o.$$

Vanwege de lineaire onafhankelijkheid van de a_j moeten dus alle $\lambda_j = 0$ zijn. Maar dan zijn de kolommen van $((a_i,a_j))_{1\leq i,j\leq l}$ lineair onafhankelijk, dus heeft deze matrix een determinant $\neq 0$.

(8.7) DEFINITIE. Een orthonormale basis in een ruimte met inproduct is een basis $e_1,\ldots,e_n$ zodat $e_i \perp e_j$ voor $i \neq j$ en $|e_i| = 1$ voor alle i. M.a.w.,

$$(e_i,e_j) = \delta_{ij} \text{ voor alle i en j.}$$

In $\mathbb{R}^n$ met het standaardinproduct $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i$ vormt de standaardbasis $(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)$ een orthonormale basis. Is omgekeerd $e_1,\ldots,e_n$ een orthonormale basis in een ruimte R met inproduct, dan is voor $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ en $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$,

$$(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\eta_j(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i.$$

LEMMA. Zijn $a_1,\ldots,a_s$ vectoren in R, zodat $a_i \perp a_j$ voor alle $i \neq j$ en $a_i \neq o$ voor $1 \leq i \leq s$, dan zijn ze lineair onafhankelijk.

Bewijs. Uit

$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_s a_s = o$

volgt

$0 = (\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_s a_s, a_i) = \lambda_i (a_i, a_i)$

voor $i = 1,\ldots,s$. Dus alle $\lambda_i = 0$.

In een n-dimensionale R vormen dus n onderling loodrechte vectoren, elk ter lengte 1, een orthonormale basis. We zullen nu een methode aangeven, hóe uit een willekeurige basis een orthonormale basis te construeren. Deze methode staat bekend als de Gram-Schmidt orthogonalisatie procedure, of het Gram-Schmidt proces.

We starten met een willekeurige basis $a_1, \ldots, a_n$ van R. Neem $e_1 = |a_1|^{-1} a_1$, dan is $|e_1| = 1$. Zij b_2 de loodrechte projectie van a_2 op $a_1^{\perp}$. Omdat a_2 lineair onafhankelijk is van a_1, moet $b_2 \neq 0$ zijn. Neem nu $e_2 = |b_2|^{-1} b_2$, dan $e_2 \perp e_1$ en $|e_2| = 1$. Merk op dat

$$< e_1 > \oplus < e_2 > = < a_1 > \oplus < a_2 > .$$

Stel nu, we hebben $e_1, \ldots, e_s$ geconstrueerd voor $1 \leq s < n$, zodat $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ voor $1 \leq i, j \leq s$ en

$$L_s = < e_1 > \oplus \ldots \oplus < e_s > = < a_1 > \oplus \ldots \oplus < a_s > .$$

a_{s+1} is niet in deze deelruimte L_s bevat, dus de projectie b_{s+1} van a_{s+1} op $L_s^{\perp}$ is $\neq 0$. Neem $e_{s+1} = |b_{s+1}|^{-1} b_{s+1}$, dan is $|e_{s+1}| = 1$, $e_{s+1} \perp e_i$ voor $1 \leq i \leq s$ en $< e_1 > \oplus \ldots \oplus < e_{s+1} > = < a_1 > \oplus \ldots \oplus < a_{s+1} >$. Na ten hoogste n stappen komen we zo bij een orthonormale basis van R. Om e_{s+1} te berekenen, als $e_1, \ldots, e_s$ bekend zijn, kan men aldus te werk gaan:

$$b_{s+1} = a_{s+1} - \alpha_{s+1,1} e_1 - \ldots - \alpha_{s+1,s} e_s$$

(waarom?). Omdat $b_{s+1} \perp e_1, \ldots, e_s$, is

$$0 = (b_{s+1},e_i) = (a_{s+1},e_i) - \alpha_{s+1,i}.$$

Dus $\alpha_{s+1,i} = (a_{s+1},e_i)$, d.w.z.

$$b_{s+1} = a_{s+1} - \sum_{j=1}^{s} (a_{s+1},e_j)e_j.$$

Delen we dan nog b_{s+1} door z'n lengte $|b_{s+1}|$, dan krijgen we e_{s+1}.

Het volgende resultaat zit opgesloten in de laatste berekeningen hierboven.

Gevolg. Is $e_1,\ldots,e_l$ een orthonormale basis van een deelruimte L van R, en is $x \in R$, dan is de projectie van x op L gelijk aan $\sum_{i=1}^{l} (x,e_i)e_i$.

(8.8) Voor $a \in R$ is

$$l_a : x \mapsto (a,x)$$

een lineaire afbeelding $R \to \mathbb{R}$, m.a.w. een functionaal op R. Blijkbaar is $l_a = l_b$ dan en slechts dan als $a = b$. We willen laten zien dat omgekeerd ieder functionaal zo te schrijven is. Zij $l : R \to \mathbb{R}$ een willekeurig functionaal. Voor $l = o$ nemen we $a = o$. Is $l \neq o$, dan is de nulruimte N van l een $(n-1)$-dimensionale deelruimte van R ($n = \dim R$), aangezien $\dim R = \dim N + \dim \mathbb{R}$, dus $N^{\perp}$ is 1-dimensionaal. Kies een $b \in N^{\perp}$, $b \neq o$. Voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ is dan

$$l(x) - \lambda(b,x) = 0 \text{ voor alle } x \in N.$$

Verder is, als we $\lambda = (b,b)^{-1}l(b)$ kiezen,

$$l(b) - \lambda(b,b) = 0.$$

De lineaire afbeelding $R \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$x \mapsto l(x) - (b,b)^{-1}l(b)(b,x)$$

is dus nul voor $x \in N$ én voor $x = b$. Daar N en b de hele ruimte R opspannen, is die afbeelding overal nul. Dat betekent dat $l = l_a$ met $a = (b,b)^{-1} l(b)b$. Daarmee is bewezen:

STELLING. Ieder lineair functionaal op R is op precies één manier te schrijven als

$$l_a : x \mapsto (a,x) \text{ voor } x \in R,$$

met vaste (d.w.z., alleen van l afhankelijke) $a \in R$.

(8.9) STELLING. Bij iedere lineaire transformatie $A : R \to R$ is er precies één lineaire transformatie $A^* : R \to R$ zodat

$$(Ax,y) = (x,A^*y) \text{ voor alle } x \text{ en } y \in R.$$

A^* noemen we de geadjungeerde van A, of de contragrediënte transformatie bij A. T.o.v. een orthonormale basis in R geldt: de matrix van A^* is de gespiegelde van de matrix van A. We hebben hierbij de volgende rekenregels:

$A^{**} = A$, $(AB)^* = B^*A^*$, en voor inverteerbare A is $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, en analoog voor matrices:

$A_0'' = A_0$, $(A_0 B_0)' = B_0' A_0'$, $(A_0^{-1})' = (A_0')^{-1}$ (als A_0^{-1} bestaat).

Bewijs. Voor vaste $y \in R$ is

$$x \mapsto (Ax,y)$$

een lineair functionaal op R, dus bij elke $y \in R$ is er precies één vector z zodat

$$(Ax,y) = (x,z) \text{ voor alle } x.$$

We nemen $A^*y = z$. Dat deze afbeelding $A^* : R \to R$ lineair is, zien we als volgt

$$\begin{aligned}(x,A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)) &= (Ax, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= \lambda_1 (Ax,y_1) + \lambda_2 (Ax,y_2) \\ &= \lambda_1 (x,A^*y_1) + \lambda_2 (x,A^*y_2) \\ &= (x, \lambda_1 A^*y_1 + \lambda_2 A^*y_2).\end{aligned}$$

Dus

$$(x, A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^* y_1 - \lambda_2 A^* y_2) = 0$$

voor alle x, waaruit wegens $R^{\perp} = o$, volgt dat

$$A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^* y_1 - \lambda_2 A^* y_2 = o.$$

Dit is precies de lineariteit van A^*. De uniciteit van A^* is duidelijk. Neem nu een orthonormale basis in R. Zij (α_{ij}) de matrix van A. Dan vinden we

$$(Ae_i, e_j) = (\sum_{l=1}^{n} \alpha_{li} e_l, e_j) = \alpha_{ji}.$$

Voor de matrix (α^*_{ij}) van A^* vinden we analoog

$$(e_i, A^* e_j) = (e_i, \sum_{l=1}^{n} \alpha^*_{lj} e_l) = \alpha^*_{ij}.$$

Dus is, wegens $(Ae_i, e_j) = (e_i, A^* e_j)$, voor alle i en j

$$\alpha^*_{ij} = \alpha_{ji},$$

d.w.z. $(\alpha^*_{ij}) = (\alpha_{ij})'$.

Hieruit volgt onmiddellijk dat $A^{**} = A$. Deze eigenschap is ook rechtstreeks uit de definitie van de geadjungeerde af te leiden:

$$(Ax, y) = (x, A^* y) = (A^* y, x) = (y, A^{**} x) = (A^{**} x, y)$$

voor alle x en y, dus

$$Ax = A^{**} x \text{ voor alle } x,$$

oftewel $A = A^{**}$. Analoog volgt $(AB)^* = B^* A^*$ uit

$$(x, (AB)^* y) = (ABx, y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y),$$

Bestaat A^{-1}, dan is $I = I^* = (AA^{-1})^* = (A^{-1})^* A^*$, d.w.z. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Een lineaire afbeelding A met $A^* = A$ heet <u>symmetrisch</u>. T.o.v. een orthonormale basis wordt zo'n symmetrische afbeelding voorgesteld door een symmetrische matrix, en omgekeerd.

(8.10) Zij R een lineaire ruimte met inproduct (,). Welke andere inproducten zijn er op R mogelijk? Zij $\langle\ ,\ \rangle$ een ander inproduct. Voor vaste $x \in R$ is dan $\langle x,y \rangle$ een lineair functionaal in y, dus te schrijven als

$$\langle x,y \rangle = (z,y)$$

voor zekere (van x afhangende) $z \in R$. Definieer $A : R \to R$ door. $Ax = z$. Dan is dus

$$\langle x,y \rangle = (Ax,y) \text{ voor alle } x \text{ en } y \text{ uit } R.$$

Net als in (8.9) voor A^*, bewijst men dat A lineair is. Verder is

$$\langle y,x \rangle = (Ay,x) = (y,A^*x) = (A^*x,y).$$

Omdat $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$, is

$$(Ax,y) = (A^*x,y) \text{ voor alle } x \text{ en } y.$$

Dus $A = A^*$, d.w.z. A is symmetrisch. Verder is

$$(Ax,x) = \langle x,x \rangle > 0 \text{ voor alle } x \neq o.$$

Een lineaire afbeelding A met deze eigenschap, d.w.z. $(Ax,x) > 0$ voor alle $x \neq o$, noemen we <u>positief definiet</u> t.o.v. het gegeven inproduct (,). Is omgekeerd A een positief definiete symmetrische lineaire afbeelding, dan is $\langle x,y \rangle = (Ax,y)$ een inproduct, zoals men makkelijk verifieert.

Neem een orthonormale basis $e_1,\ldots,e_n$ t.o.v. (,). A wordt dan voorgesteld door een symmetrische matrix (α_{ij}). Dan is voor $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ en $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$,

$$\langle x,y \rangle = (Ax,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\eta_j.$$

Positief definiet zijn van A betekent voor de matrix:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j > 0 \text{ voor alle } (\xi_1,\ldots,\xi_n) \neq (0,\ldots,0).$$

Een matrix (α_{ij}) met deze eigenschap noemen we <u>positief definiet</u>. We komen later terug op een karakterisering van positief definiete symmetrische matrices.

Nemen we in het bovenstaande voor (,) het standaard-inproduct t.o.v. een gegeven basis van R, dan komen we tot het volgende resultaat.

STELLING. Zij $e_1,\ldots,e_n$ een willekeurige basis van een reële lineaire ruimte R. De mogelijke inproducten in R zijn van de gedaante

$$< x,y > = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\eta_j \quad \text{voor } x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \text{ en } y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j,$$

met een positief definiete symmetrische matrix (α_{ij}).

(8.11) In de situatie van de laatste stelling vragen we ons nu af: hoe verandert de matrix (α_{ij}) bij coördinatentransformatie in R? Neem een tweede basis $f_1,\ldots,f_n$. Laten E en F de coördinatiseringsafbeeldingen van R op $\mathbb{R}^n$ zijn bij deze twee bases, d.w.z.

$$Ee_i = Ff_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$$

met de 1 op de i-de plaats. Het standaardinproduct in $\mathbb{R}^n$ duiden we met (,) aan. Zij A_e de matrix van het inproduct $< , >$ t.o.v. de basis $e_1,\ldots,e_n$ als in bovenstaande stelling, d.w.z. $< x,y > = (A_eEx,Ey)$ voor x en y uit R. Analoog is A_f de matrix van $< , >$ t.o.v. de basis $f_1,\ldots,f_n$: $< x,y > = (A_fFx,Fy)$. $S_0 = FE^{-1}$ is de matrix van de coördinatentransformatie S die de e_i in de f_i overvoert (vgl. (3.7)). We hebben dan voor x en y $\in$ R:

$$\begin{aligned}(A_eEx,Ey) &= < x,y > \\ &= (A_fFx,Fy) \\ &= (A_fS_0Ex,S_0Ey) \\ &= (S_0'A_fS_0Ex,Ey).\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $A_e = S_0' A_f S_0$. Daarmee is de volgende stelling bewezen.

STELLING. Stel $< , >$ is een inproduct in een lineaire ruimte R. Stel $A_e = (\alpha_{ij})$ is de symmetrische matrix die $< , >$ voorstelt t.o.v. de basis $e_1, \ldots, e_n$:

$$< \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j > = \Sigma \alpha_{ij} \xi_i \eta_j,$$

en zij analoog A_f de matrix van $< , >$ t.o.v. een andere basis $f_1, \ldots, f_n$. Zij verder S_0 de matrix t.o.v. $e_1, \ldots, e_n$ van de coördinatentransformatie S, die e_i in f_i overvoert. Dan is

$$A_e = S_0' A_f S_0 .$$

Vraag: A_e is in feite de matrix van een lineaire afbeelding: zie de discussie in (8.10). Hoe komt het dan dat bij overgang op een andere basis, A_e anders getransformeerd wordt dan gebruikelijk is bij een lineaire afbeelding, te weten $A_e = S_0^{-1} A_f S_0$?

§9. ISOMETRIEËN EN ORTHOGONALE TRANSFORMATIES.

Het ligt voor de hand, om in een lineaire ruimte R met inproduct (,) de lineaire transformaties A te onderzoeken die het inproduct invariant laten, d.w.z.

$(Ax,Ay) = (x,y)$ voor alle x en y $\in$ R.

We noemen dit orthogonale transformaties. We stellen het probleem iets algemener: gevraagd willekeurige afbeeldingen A van R in zichzelf die de afstand behouden:

$d(Ax,Ay) = d(x,y)$ voor x en y $\in$ R.

Deze heten de isometrieën van R t.o.v. (,). Het zal blijken dat elke isometrie te schrijven is als product van een translatie (d.i. een verschuiving van R over een vaste vector) en een orthogonale transformatie.

IN DEZE PARAGRAAF DUIDT R STEEDS EEN EINDIG-DIMENSIONALE RUIMTE MET EEN VAST GEGEVEN INPRODUCT (,) AAN.

(9.1) DEFINITIE. Een afbeelding $A : R \to R$ heet een isometrie of beweging, als A de afstanden behoudt d.w.z.

$d(Ax,Ay) = d(x,y)$ voor alle x,y $\in$ R.

Een isometrie is noodzakelijk 1-1: als $Ax = Ay$, dan is $d(x,y) = d(Ax,Ay) = 0$, dus $x = y$. De identiteit is een isometrie, evenals het product van twee isometrieën.

Een eenvoudig soort isometrieën wordt in de volgende definitie gegeven.

DEFINITIE. Voor $a \in R$ is de translatie of verschuiving over a de afbeelding $T_a : R \to R$ met

$$T_a x = x+a \text{ voor } x \in R.$$

(N.B. Deze definitie is geldig in een willekeurige lineaire ruimte, al of niet eindig-dimensionaal.)

Zonder veel moeite rekent men na, dat

$$T_a T_b = T_{a+b},\ T_o = id.,\ T_a^{-1} = T_{-a}.$$

Elke translatie T_a is een isometrie:

$$d(T_a x, T_a y) = |(x+a)-(y+a)| = |x-y| = d(x,y).$$

Is B een 1-1 lineaire transformatie, dan is

$$\begin{aligned} T_{Ba} x &= x + Ba \\ &= B(B^{-1}x + a) \\ &= BT_a B^{-1} x, \end{aligned}$$

dus

$$T_{Ba} = BT_a B^{-1}.$$

(9.2) DEFINITIE. Een isometrie die o vastlaat noemen we een orthogonale transformatie.

STELLING. Een orthogonale transformatie A is lineair, behoudt het inproduct, d.w.z.

$$(Ax,Ay) = (x,y) \text{ voor alle } x \text{ en } y,$$

en is 1-1 en op.

Bewijs. A behoudt de afstand, dus

$$(Ax-Ay,Ax-Ay) = (x-y,x-y) \text{ voor alle } x \text{ en } y.$$

Uitschrijven levert

$$(Ax,Ax) + (Ay,Ay) - 2(Ax,Ay) = (x,x) + (y,y) - 2(x,y).$$

Neem eerst $y = o$, dan ook $Ay = o$, dus

$$(Ax,Ax) = (x,x) \text{ voor alle } x.$$

Maar dan is ook $(Ay,Ay) = (y,y)$ voor alle y, dus

$$(Ax,Ay) = (x,y).$$

Zij $e_1,\ldots,e_n$ een orthonormale basis. $Ae_1,\ldots,Ae_n$ vormen een orthonormaal stelsel, dus een orthonormale basis. Neem nu een willekeurige vector

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i.$$

Omdat $e_1,\ldots,e_n$ orthonormaal is, is

$$\xi_i = (x,e_i) = (Ax,Ae_i).$$

Analoog is, omdat $Ae_1,\ldots,Ae_n$ een orthonormale basis is,

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (Ax,Ae_i)Ae_i.$$

Dus

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi_i Ae_i.$$

Hieruit volgt direct dat A lineair, 1-1 en op is.

(9.3) Zij nu A een willekeurige isometrie. Neem $a = Ao$, dan is $B = T_{-a}A$ een isometrie die o vastlaat, d.w.z. een orthogonale transformatie. Dus

$$A = T_a B.$$

T_a en B zijn beide 1-1 en op, dus A is het ook. Verder is

$$A = BB^{-1}T_a B = BT_{B^{-1}a}.$$

De inverse van een isometrie is ook een isometrie, zoals gemakkelijk uit de definitie valt af te leiden. Daarmee hebben we bewezen:

STELLING. Iedere isometrie is 1-1 en op, en z'n inverse is ook een isometrie. Elke isometrie A kan geschreven worden als

$A = T_a B$

en ook als

$A = B T_b$,

waarin B een éénduidig bepaalde orthogonale transformatie is, $a = Ao$, $b = B^{-1}a$.

(9.4) Hoe ziet de matrix van een orthogonale afbeelding er uit? We nemen een orthogonale basis. Zij A een lineaire afbeelding met matrix $A = (\alpha_{ij})$. Is A orthogonaal, dan vormen de beelden van de basisvectoren een orthonormaal stelsel. Maar de beelden van $e_1, \ldots, e_n$ zijn de kolommen van A, dus orthonormaliteit van $Ae_1, \ldots, Ae_n$ wordt beschreven door de relaties

$$\sum_{l=1}^{n} \alpha_{li}\, \alpha_{lj} = \delta_{ij},\quad 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

Dit noemen we de orthogonaliteitsrelaties voor de kolommen van A. Stel dat omgekeerd de matrix A aan deze relaties voldoet. Dan vormen $Ae_1, \ldots, Ae_n$ een orthonormaal stelsel, dus voor $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ is

$$\begin{aligned}(Ax,Ax) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i Ae_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j Ae_j\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\\ &= (x,x),\end{aligned}$$

wat betekent dat A orthogonaal is. De orthogonaliteitsrelaties van de kolommen kunnen we ook uitdrukken door

$A'A = I$.

Hieruit volgt dat

$A' = A^{-1}$.

Maar dan is ook

$AA' = AA^{-1} = I$,

en dit levert de orthogonaliteitsrelaties voor de rijen:

$$\sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\,\alpha_{jl} = \delta_{ij}.$$

Omgekeerd volgen hieruit de orthogonaliteitsrelaties voor de kolommen, want $AA' = I$ impliceert $A' = A^{-1}$, dus $A'A = A^{-1}A = I$. We hebben dus bewezen:

STELLING. Zij $A = (\alpha_{ij})$ de matrix van een lineaire afbeelding (ook A genoemd) t.o.v. een orthonormale basis $e_1,\ldots,e_n$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

(i) A is een orthogonale transformatie.

(ii) A voert een orthonormale basis in een orthonormale basis over.

(iii) $A'A = I$.

(iv) $AA' = I$.

(v) $\sum_{l=1}^{n} \alpha_{li}\,\alpha_{lj} = \delta_{ij}$ voor $1 \leqslant i,j \leqslant n$ (orthogonaliteitsrelaties voor de kolommen).

(vi) $\sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\,\alpha_{jl} = \delta_{ij}$ voor $1 \leqslant i,j \leqslant n$ (orthogonaliteitsrelaties voor de rijen).

DEFINITIE. Een matrix die aan (één van) de relaties (iii) t/m (vi) van bovenstaande stelling voldoet, heet orthogonaal.

Een orthogonale afbeelding wordt dus, t.o.v. een orthonormale basis, door een orthogonale matrix beschreven en omgekeerd.

(9.5) DEFINITIE. Een coördinatentransformatie heet orthogonaal als hij een orthonormale basis in een orthonormale basis overvoert.

Het is duidelijk dat een coördinatentransformatie S orthogonaal is dan en slechts dan als de matrix van S aan de orthogonaliteitsrelaties voor de kolommen voldoet, m.a.w. een orthogonale matrix is.

(9.6) STELLING. Voor een orthogonale transformatie A geldt: det A = 1 of -1.

Bewijs. Uit de relatie

$$AA' = 1$$

volgt, omdat det A' = det A,

$$(\det A)^2 = 1,$$

waaruit het gestelde volgt.

DEFINITIE. Voor $a \in R$, $a \neq o$, is S_a de lineaire afbeelding die a overvoert in -a en alle vectoren $x \perp a$ vastlaat. S_a heet de (loodrechte) spiegeling in $a^{\perp}$.

Merk op, dat $S_{\lambda a} = S_a$ voor $\lambda \neq 0$; omgekeerd volgt uit $S_b = S_a$ dat $b = \lambda a$.

Kies een orthonormale basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$ met $e_1 = (a,a)^{-\frac{1}{2}} a$, dus $e_2, \ldots, e_n$ in $a^{\perp}$. T.o.v. deze basis heeft S_a de matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

S_a is dus een orthogonale transformatie met det S_a = -1.

S_a kunnen we ook anders beschrijven. Ontbind een willekeurige vector x in z'n projectie op $< a >$ en op $a^{\perp}$:

$$x = (a,a)^{-1}(a,x)a + [x-(a,a)^{-1}(a,x)a].$$

Omdat S_a lineair is, volgt hieruit

$$S_a x = -(a,a)^{-1}(a,x)a + |x-(a,a)^{-1}(a,x)a|$$
$$= x - 2(a,a)^{-1}(a,x)a.$$

Door dit in $(S_a x, S_a y)$ in te vullen, kan men nog eens verifiëren dat S_a orthogonaal is.

(9.7) Voor we met het algemene onderzoek van orthogonale transformaties verdergaan, bekijken we het speciale geval van $\mathbb{R}^2$ met standaardinproduct (,) eerst eens uitvoerig. Zij

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

orthogonaal. Uit

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = 1$$

volgt het bestaan van een ϕ, $0 \leqslant \phi < 2\pi$, met

$$\alpha_{11} = \cos\phi, \quad \alpha_{21} = \sin\phi.$$

Voor de tweede kolom hebben we evenzo

$$\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 = 1,$$

dus er is een ψ, $0 \leqslant \psi < 2\pi$, met

$$\alpha_{12} = \sin\psi, \quad \alpha_{22} = \cos\psi.$$

Uit

$$\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} = 0$$

volgt

$$\cos\phi \sin\psi + \sin\phi \cos\psi = 0$$
$$\sin(\phi+\psi) = 0$$
$$\phi+\psi = l\pi, \quad l = 0,1,2 \text{ of } 3.$$

Dus òf $\cos\psi = -\cos\phi$, $\sin\phi = \sin\psi$ (voor $l = 1,3$)

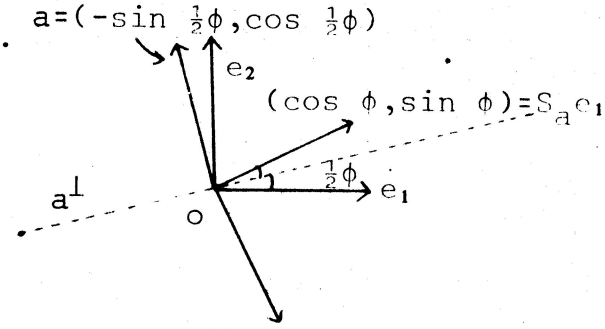
òf $\cos\psi = \cos\phi$, $\sin\phi = -\sin\psi$ (voor $l = 0,2$).

We krijgen zo voor A twee mogelijkheden.

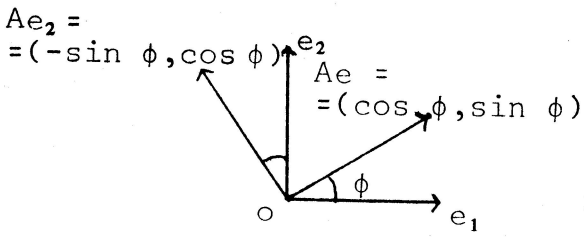
(i) $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$, $\det A = -\cos^2\phi - \sin^2\phi = -1$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, $\det A = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$.

Spiegelingen in een rechte hebben determinant -1, zoals we gezien hebben. Deze komen dus voor ondertype (i). Bij narekenen blijkt inderdaad dat A als in (i) de vectoren $\lambda(\cos\frac{1}{2}\phi, \sin\frac{1}{2}\phi)$ ($\lambda \in k$) vastlaat, en $(-\sin\frac{1}{2}\phi, \cos\frac{1}{2}\phi)$ met -1 vermenigvuldigt. Dus is $A = S_a$ met $a = (-\sin\frac{1}{2}\phi, \cos\frac{1}{2}\phi)$. In bijgaande figuur 1 ziet u dit geval geïllustreerd. Een transformatie A van type (ii) draait de basisvectoren e_1 en e_2 over een hoek ϕ (zie figuur 2). We noemen dit een draaiing of rotatie over een hoek ϕ.



figuur 1.



figuur 2.

Het product van twee spiegelingen A en B is gemakkelijk te berekenen:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(\phi-\psi) & -\sin(\phi-\psi) \\ \sin(\phi-\psi) & \cos(\phi-\psi) \end{pmatrix}.$$

Nu is $\phi-\psi$ het dubbele van de hoek tussen de lijnen waarin gespiegeld wordt. Conclusie: het product van de spiegelingen in twee lijnen die een hoek α met elkaar maken, is een draaiing over een hoek 2α. Uiteraard is iedere draaiing zo te schrijven.

Voor een orthogonale transformatie A in het vlak blijken er dus twee mogelijkheden te zijn.

(a) det A = -1. A is een spiegeling in een rechte door 0.

(b) det A = 1. A is een rotatie en is te schrijven als het product van twee spiegelingen in rechten door 0.

(9.8) We werken nu weer in een willekeurige eindig-dimensionale ruimte R met inproduct.

DEFINITIE. Een orthogonale transformatie A heet een draaiing of rotatie als det A = 1, en een draaispiegeling als det A = -1.

STELLING. Zij dim R = n en A een orthogonale transformatie in R. Dan geldt:

(i) Er zijn d vectoren $a_1,\ldots,a_d$ in R, met $d \leqslant n$, alle $a_i \neq 0$, zodat $A = S_{a_1} S_{a_2} \cdots S_{a_d}$. A is een draaiing als d even is, en een draaispiegeling als d oneven is.

(ii) Is A een draaiing, dan zijn er 2-dimensionale deelruimten $V_1,V_2,\ldots,V_s$ in R, $s \leqslant \frac{1}{2}n$, met $V_i \perp V_j$ voor $i \neq j$, zodat

$$A = R_{V_1} R_{V_2} \cdots R_{V_s},$$

waarin elke R_{V_i} een draaiing in V_i is, d.w.z. R_{V_i} is een draaiing met $R_{V_i}|V_i^{\perp} = \mathrm{id}$.

(iii) Is A een draaispiegeling, dan zijn er een vector $a \neq 0$ en 2-dimensionale deelruimten $V_1,V_2,\ldots,V_s$ in R, $s \leqslant \frac{1}{2}n-1$, met $V_i \perp V_j$ voor $i \neq j$ en $a \perp V_i$ voor alle i, zodat

$$A = R_{V_1} \cdot R_{V_2} \cdots R_{V_s} \cdot S_a,$$

met R_{V_i} als in (ii) en S_a de spiegeling in $a^{\perp}$.

(iv) Er is een orthonormale basis $e_1,e_2,\ldots,e_n$ in R, ten opzichte waarvan de matrix van A de gedaante

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & & & & \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & & & & \\ & & \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 & & \\ & & \sin\phi_2 & \cos\phi_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & \cos\phi_s & -\sin\phi_s \\ & & & & \sin\phi_s & \cos\phi_s \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

heeft ingeval A een draaiing is, en de gedaante

$$A=\begin{pmatrix}
\begin{matrix}\cos\phi_1 & -\sin\phi_1\\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1\end{matrix} & & & & \\
& \begin{matrix}\cos\phi_2 & -\sin\phi_2\\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2\end{matrix} & & 0 & \\
& & \ddots & & \\
& & & \begin{matrix}\cos\phi_s & -\sin\phi_s\\ \sin\phi_s & \cos\phi_s\end{matrix} & \\
& 0 & & & \begin{matrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{matrix}
\end{pmatrix}$$

als A een draaispiegeling is.

Bewijs. (i) we passen hier volledige inductie naar n toe.

n=1. Dan is A = 1 of -1 (waarom?), dus A is het product van 0 of 1 spiegelingen.

Neem nu aan, dat $n > 1$ is en dat (i) bewezen is voor ruimten van dimensie $< n$. Neem een vector $a \neq o$ en noem $Aa = b$. Omdat $|a| = |b|$, is

$$(a,a-b) = (a,a) - (a,b) = (b,b) - (a,b) = -(b,a-b),$$

dus

$$(a-b,a-b) = (a,a-b) - (b,a-b) = -2(b,a-b).$$

Als $a \neq b$, dan is

$$\begin{aligned} S_{a-b}b &= b - 2(a-b,a-b)^{-1}(b,a-b)(a-b) \\ &= b + 2[2(b,a-b)]^{-1}(b,a-b)(a-b) \\ &= b + (a-b) \\ &= a. \end{aligned}$$

$S_{a-b}A$ laat a vast, dus ook het orthogonaal complement $a^{\perp}$. De restrictie van $S_{a-b}A$ tot $a^{\perp}$ induceert daarin weer een orthogonale transformatie, die wegens de inductieveronderstelling product is van ten hoogste n-1 spiegelingen:

$$S_{a-b}A = S_{a_2} \cdot \ldots \cdot S_{a_d} \text{ met } d \leqslant n.$$

Wegens $S_{a-b}^{-1} = S_{a-b}$, is

$$A = S_{a-b} \cdot S_{a_2} \ldots\ldots S_{a_d}.$$

Als $a = b$, dan induceert A zelf een orthogonale transformatie in $a^{\perp}$, waarop we de inductieveronderstelling kunnen toepassen. Wegens

$$\det A = \det S_{a_1} \cdot \det S_{a_2} \ldots\ldots \det S_{a_d}$$
$$= (-1)^d$$

zijn de laatste twee beweringen van (i) evident.

(ii) Is A een draaiing, dan is dus

$$A = S_{a_1} \ldots\ldots S_{a_d}, \; d \text{ even}, \; d \leqslant n.$$

We mogen aannemen dat a_1 en a_2 lineair onafhankelijk zijn, omdat anders $S_{a_1} = S_{a_2}$, dus $S_{a_1} S_{a_2} = \text{id.}$, zodat we de eerste twee factoren S_{a_1} en S_{a_2} konden wegschrappen. Neem $V_1 = \langle a_1 \rangle \oplus \langle a_2 \rangle$ en definieer $R_{V_1} = S_{a_1} S_{a_2}$. R_{V_1} is een draaiing, en voor $x \perp V_1$ is

$$R_{V_1} x = S_{a_1} S_{a_2} x = x.$$

$R_{V_1}^{-1} A$ induceert de identiteit op V_1, en transformeert $V_1^{\perp}$ dus in zichzelf. Het bewijs gaat nu met inductie naar n. Voor $n = 1$ is $d = 0$, dus $A = I$. Stel $n \geqslant 2$ en neem aan, de stelling is bewezen voor ruimten van dim $< n$. $R_{V_1}^{-1} A | V_1^{\perp}$ is dan te schrijven als product $R_{V_2} \ldots\ldots R_{V_s}$ met $s < \frac{1}{2}n$, $V_i \perp V_j$ voor $i \neq j$. Elke R_{V_i} kunnen we voortzetten tot een draaiing van de hele R, door de vectoren van V_1 vast te laten; noem die voortzetting ook R_{V_i}. Dan is dus

$$R_{V_1}^{-1} A = R_{V_2} \ldots\ldots R_{V_s}$$
$$A = R_{V_1} \cdot R_{V_2} \ldots\ldots R_{V_s}.$$

(iii) Het bewijs hiervan gaat analoog, met dien verstande dat we met het geval $n = 1$ beginnen, waarin A een spiegeling is.

(iv) Is A een draaiing, dan nemen we $V_1,\ldots,V_d$ als in (ii) en kiezen voor e_{2i-1},e_{2i} een orthonormale basis van V_i, $1 \leq i \leq d$, en voor $e_{2d+1},\ldots,e_n$ een orthonormale basis van $(V_1 \oplus \ldots \oplus V_d)^{\perp}$. Uit (9.7) volgt dat de matrix van R_{V_i} t.o.v. deze basis er uitziet als

$$R_{V_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cos\phi_i & -\sin\phi_i & \\ & & & \sin\phi_i & \cos\phi_i & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

waaruit het resultaat volgt door vermenigvuldiging van deze matrices met elkaar. Als A een draaispiegeling is, nemen we $e_1,\ldots,e_{2d}$ als boven, $e_{2d+1} = |a|^{-1}a$, en voor $e_{2d+2},\ldots,e_n$ een orthonormale basis van $(V_1 \oplus \ldots \oplus V_d \oplus \langle a \rangle)^{\perp}$. De R_{V_i} zien er weer uit als boven, en voor S_a krijgen we de matrix

$$S_a = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

met -1 op de (2d+1)-de plaats in de diagonaal.

Opmerkingen. 1. De splitsing van een orthogonale transformatie A in spiegelingen, als in (i), of in draaiingen in onderling loodrechte 2-dimensionale ruimten en eventueel een spiegeling, als in (ii) en (iii), is in het algemeen op meer dan één manier mogelijk. Men kan bijvoorbeeld de volgorde van de ruimten $V_1,\ldots,V_d$ verwisselen (ga na, dat dit geen invloed heeft op het product $R_{V_1} \ldots\ldots R_{V_d}$). De grootheden $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_d$, $0 \leq \phi_i < 2\pi$,

zijn echter bij gegeven A ondubbelzinnig bepaald, zoals we later zullen aantonen; we noemen deze de draaiingshoeken van A.

2. Zoals we gezien hebben, is een draaispiegeling product van een draaiing en een spiegeling; vandaar de naam van het ding.

Uit bovenstaande stelling volgt o.a.

Gevolg. (i) Is dim R = n oneven en A een draaing in R, dan bestaan er vectoren $x \neq o$ zodat $Ax = x$. Voor zo'n x heet $< x >$ een draaiingsas van A.

(ii) Is dim R = n even en A een draaispiegeling, dan bestaan er eveneens vectoren $x \neq o$ zodat $Ax = x$.

Bewijs. (i) Schrijven we A als in (ii) van bovenstaande stelling. Dan is $2d < n$, aangezien n oneven is. Dus

$$(V_1 \oplus \ldots \oplus V_d)^{\perp} \neq o.$$

Iedere vector x uit $(V_1 \oplus \ldots \oplus V_d)^{\perp}$ heeft de eigenschap dat $Ax = x$.

(ii) Schrijf nu A als in (iii) van bovenstaande stelling. Nu is

$$(V_1 \oplus \ldots \oplus V_d \oplus < a >)^{\perp} \neq o,$$

aangezien $2d+1 < n$. Elke $x \in (V_1 \oplus \ldots \oplus V_d \oplus < a >)^{\perp}$, $x \neq o$, voldoet aan de eis.

Punt (i) van dit Gevolg heeft een belangrijke consequentie voor de mechanica, nl. dat elke draaiing A in de $\mathbb{R}^3$ een draaiingsas heeft. Als $A \neq I$ is, is die as eenduidig bepaald (waarom?).

§10. VOLUME, ORIËNTERING EN UITPRODUCT.

Naast de lengte van vectoren hebben we ook behoefte aan begrippen als oppervlakte van een parallelogram, inhoud van een parallelopipedum, en hoger-dimensionale analoga hiervan. Het oppervlak van een parallelogram is gelijk aan de lengte van de basis maal de hoogte, de inhoud van een parallelopipedum gelijk aan het oppervlak van het grondvlak maal de hoogte. Generaliserend komen we zo tot de volgende definitie, waarin R, zoals steeds in deze paragraaf, een n-dimensionale ruimte met inproduct is.

(10.1) DEFINITIE. Het d-dimensionale volume is een functie van d vectoren uit R, $1 \leqslant d \leqslant n$, genoteerd als $\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_d)$, en als volgt met inductie naar d gedefinieerd.

1. $\mathrm{vol}_1(x_1) = |x_1|$.
2. $\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_{d-1},x_d) = \mathrm{vol}_{d-1}(x_1,\ldots,x_{d-1}).|x_d'|$, waarin x_d' = projectie van x_d op $(<x_1> + \ldots + <x_d>)^{\perp}$. $(1 < d \leqslant n)$.

Blijkbaar is $\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_d) \geqslant 0$. Gezien de definitie lijkt $\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_d)$ afhankelijk van de volgorde van de vectoren $x_1,\ldots,x_d$. Dat dit echter niet het geval is, volgt uit onderstaande stelling.

STELLING.

$$\mathrm{vol}_d(x_1,x_2,\ldots,x_d)^2 = \begin{vmatrix} (x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \ldots & (x_1,x_d) \\ (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & \ldots & (x_2,x_d) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_d,x_1) & (x_d,x_2) & \ldots & (x_d,x_d) \end{vmatrix} .$$

Bewijs. Met inductie naar d.

d = 1. Dan is $\mathrm{vol}_1(x_1)^2 = |x_1|^2 = (x_1,x_1) = \det((x_1,x_1))$.

Stel nu bewezen voor d-1, waarbij $1 < d \leq n$.

Laat $x_d'' = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{d-1}x_{d-1}$ de projectie van x_d op $< x_1 > + \ldots + < x_{d-1} >$ zijn. Dan is dus

$$x_d' = x_d - \alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_{d-1}x_{d-1}.$$

Trek in de matrix $((x_i,x_j))_{1\leq i,j\leq d}$ van de laatste kolom af: α_1 (eerste kolom) + α_2 (tweede kolom) + ... + α_{d-1} ((d-1)-de kolom); daarbij verandert de determinant niet. Maar deze operatie komt er op neer, dat we in de laatste kolom (x_i,x_d) steeds vervangen door $(x_i,x_d') = (x_i,x_d) - \alpha_1(x_i,x_1) - \ldots - \alpha_{d-1}(x_i,x_{d-1})$. Hetzelfde doen we daarna met de rijen: van de laatste rij trekken we af: α_1 (eerste rij) + α_2 (tweede rij) + ... + α_{d-1} ((d-1)-de rij). Dit komt neer op vervangen van (x_d,x_j) door (x_d',x_j) in de laatste rij. We vinden dus:

$$\begin{vmatrix} (x_1,x_1) & \ldots & (x_1,x_{d-1}) & (x_1,x_d) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_{d-1},x_1) & \ldots & (x_{d-1},x_{d-1}) & (x_{d-1},x_d) \\ (x_d,x_1) & \ldots & (x_d,x_{d-1}) & (x_d,x_d) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_1,x_1) & \ldots & (x_1,x_{d-1}) & (x_1,x_d') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_{d-1},x_1) & \ldots & (x_{d-1},x_{d-1}) & (x_{d-1},x_d') \\ (x_d',x_1) & \ldots & (x_d',x_{d-1}) & (x_d',x_d') \end{vmatrix}$$

Omdat $(x_i,x_d') = 0$ voor $i \neq d$, is de laatste determinant gelijk aan

$$\left|(x_i,x_j)\right|_{1\leq i,j\leq d-1}(x_d',x_d') = \mathrm{vol}_{d-1}(x_1,\ldots,x_{d-1})^2 \cdot |x_d'|^2.$$

In het bovenstaande bewijs hebben we gezien dat $\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_d)$ niet verandert, als we bij één van de vectoren x_i een lineaire combinatie van de andere optellen. Op dezelfde manier ziet men in, dat vermenigvuldiging van x_i met $\lambda \in \mathbb{R}$ tot gevolg heeft, dat vol_d met $|\lambda|$ vermenigvuldigd wordt. Dus

Gevolg. (i) $\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_i+\sum_{j\neq i}\lambda_j x_j,\ldots,x_d)=\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_d)$.

(ii) $\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,\lambda x_i,\ldots,x_d)=|\lambda|\mathrm{vol}\,(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_d)$.

(10.2) Uit de boven bewezen stelling kunnen we gemakkelijk een aantal eigenschappen van het d-dimensionale volume afleiden, die we in de volgende stelling vermelden.

STELLING. (i) Is A een orthogonale transformatie, dan is

$$\mathrm{vol}_d(Ax_1,\ldots,Ax_d)=\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_d).$$

(ii) $\mathrm{vol}_d(x_{\pi 1},\ldots,x_{\pi d})=\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_d)$ voor elke permutatie π van $1,..,d$.

(iii) $\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_d)=0$ dan en slechts dan als $x_1,..,x_d$ lineair afhankelijk zijn.

(iv) $\mathrm{vol}_n(x_1,\ldots,x_n)=|\det(x_1,\ldots,x_n)|$, als $n=\dim R$, waarin $\det(x_1,\ldots,x_n)$ de determinant is van de matrix met de x_i als kolomvectoren (of als rijvectoren), uitgeschreven op een orthonormale basis.

Bewijs. (i) Voor een orthogonale transformatie A is

$$(Ax_i,Ax_j)=(x_i,x_j),$$

dus ook

$$|(Ax_i,Ax_j)|_{1\leq i,j\leq d}=|(x_i,x_j)|_{1\leq i,j\leq d}.$$

Met de vorige stelling volgt hieruit

$$\mathrm{vol}_d(Ax_1,\ldots,Ax_d)=\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_d).$$

(ii) Permuteren van $x_1,\ldots,x_d$ heeft tot gevolg dat in de matrix $((x_i,x_j))_{1\leq i,j\leq d}$ de kolommen en de rijen gepermuteerd worden; hierbij verandert de determinant van die matrix niet, dus ook $\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_d)$ niet.

(iii) "slechts dan" bewijzen we met inductie naar d. Voor d = 1 is het duidelijk. Stel het is bewezen voor d-1 met $1 < d \leqslant n$. Als $\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_d) = 0$, dan is dus wegens de definitie,

$$\mathrm{vol}_{d-1}(x_1,\ldots,x_{d-1}) = 0 \text{ of } |x_d'| = 0.$$

In het eerste geval zijn $x_1,\ldots,x_{d-1}$ lineair afhankelijk volgens de inductieveronderstelling, dus ook $x_1,\ldots,x_d$. In het tweede geval is $x_d' = o$, dus vinden we de niet-triviale relatie

$$x_d - \alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_{d-1}x_{d-1} = o,$$

als $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{d-1}x_{d-1}$ weer de projectie van x_d op de door $x_1,\ldots,x_{d-1}$ opgespannen deelruimte is.

"dan" bewijzen we als volgt. Als $x_1,\ldots,x_d$ lineair afhankelijk zijn, mogen we, na eventueel permuteren, aannemen dat

$$x_1 = \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_d x_d.$$

Trek in $|(x_i,x_j)|_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ van de eerste kolom af:

λ_2 (tweede kolom) + ... + λ_d (d-de kolom). Dan krijgen we:

$$\mathrm{vol}_d(x_1,\ldots,x_d)^2 = \begin{vmatrix} (x_1, x_1-\lambda_2 x_2-\ldots-\lambda_d x_d) & (x_1,x_2) & \ldots & (x_1,x_d) \\ (x_2, x_1-\lambda_2 x_2-\ldots-\lambda_d x_d) & (x_2,x_2) & \ldots & (x_2,x_d) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_d, x_1-\lambda_2 x_2-\ldots-\lambda_d x_d) & (x_d,x_2) & \ldots & (x_d,x_d) \end{vmatrix}$$

= 0, omdat in de eerste kolom overal 0 staat.

(iv) Neem een orthonormale basis $e_1,\ldots,e_n$ en stel $x_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij} e_i$, voor $1 \leqslant j \leqslant n$. Neem $X = (\xi_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, de matrix met de x_j's als kolomvectoren. We berekenen de matrix $X'X = (\eta_{ij})$.

$$\eta_{ij} = \sum_{e=1}^{n} \xi_{ei}\xi_{ej} = (x_i,x_j).$$

Wegens det X' = det X, is dus

$$(\det X)^2 = \det X'X = |(x_i,x_j)|_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \mathrm{vol}_n^2(x_1,\ldots,x_n).$$

(10.3) Punt (iv) van de vorige stelling laat zien dat we de

determinant als een soort van geörienteerd volume kunnen interpreteren. We definiëren derhalve:

DEFINITIE. Zij S een willekeurige lineaire ruimte met basis $a_1,\ldots,a_n$. Zijn $x_1,\ldots,x_n$ vectoren in S met $x_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij}a_i$, dan heet

$$V(x_1,\ldots,x_n) = |\xi_{ij}|_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

het geörienteerde volume van $x_1,\ldots,x_n$.

Merk op dat $V(x_1,\ldots,x_n)$ afhankelijk is van de basis. Is $b_1,\ldots,b_n$ een andere basis met $a_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}b_i$, dan is $x_j = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{e=1}^{n} \alpha_{ie}\xi_{ej})b_i$. Is V' het volume t.o.v. de basis $b_1,\ldots,b_n$, dan vinden we

$$V'(x_1,\ldots,x_n) = |\sum_{e=1}^{n} \alpha_{ie}\xi_{ej}|_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

$$= |\alpha_{ij}|_{1\leqslant i,j\leqslant n}|\xi_{ij}|_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Dus

$$V'(x_1,\ldots,x_n) = \det A.V(x_1,\ldots,x_n),$$

met $A = (\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, d.w.z.

$$V'(x_1,\ldots,x_n) = V'(a_1,\ldots,a_n)\ V(x_1,\ldots,x_n).$$

Uit de eigenschappen van determinanten is onmiddellijk het volgende duidelijk.

STELLING. Het geörienteerde volume V heeft de volgende eigenschappen.

(i) $V(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = V(x_1,\ldots,x_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j x_j,\ldots,x_n)$.

(ii) $V(x_1,\ldots,x_n)$ is een lineaire functie in elk van de x_i afzonderlijk.

(iii) $V(x_1,\ldots,x_n) = 0$ dan en slechts dan als $x_1,\ldots,x_n$ lineair afhankelijk zijn.

(iv) Is π een permutatie van $1,\ldots,n$, dan is

$$V(x_{\pi 1},\ldots,x_{\pi n}) = sg(\pi)\, V(x_1,\ldots,x_n).$$

(v) Is $A : S \to S$ een lineaire transformatie, dan is

$$V(Ax_1,\ldots,Ax_n) = \det A.V(x_1,\ldots,x_n).$$

Opmerking. Men kan (iv) uit (iii) en (v) afleiden. Zijn nl. $x_1,\ldots,x_n$ lineair afhankelijk, dan is

$$V(x_1,\ldots,x_n) = 0 = V(x_{\pi 1},\ldots,x_{\pi n}).$$

Zijn $x_1,\ldots,x_n$ lineair onafhankelijk dan definiëren we de lineaire transformatie A door: $Ax_i = x_{\pi i}$. Er geldt dan: $\det A = sg(\pi)$ (ga na!), zodat (iv) uit (v) volgt in dit geval.

(10.4) Met het geörienteerde volume kunnen we een oriëntatie in een lineaire ruimte definiëren.

DEFINITIE. Zij S een lineaire ruimte met basis $a_1,\ldots,a_n$, en laat V het geörienteerde volume t.o.v. deze basis aanduiden. Dan heten n lineair onafhankelijke vectoren $x_1,\ldots,x_n$ (in de gegeven volgorde) positief (negatief) geörienteerd (t.o.v. $a_1,\ldots,a_n$) als

$$V(x_1,\ldots,x_n) > 0 \text{ (resp. } < 0).$$

STELLING. Stel $x_1,\ldots,x_n$ zijn lineair onafhankelijke vectoren in S.

(i) De oriëntatie van $x_1,\ldots,x_n$ verandert niet als men bij één van de vectoren x_i een lineaire combinatie $\sum_{j\neq i} \lambda_j x_j$ van de andere vectoren optelt.

(ii) Is π een permutatie, dan is de oriëntatie van $x_{\pi 1},\ldots,x_{\pi n}$ hetzelfde als die van $x_1,\ldots,x_n$ wanneer π even is, en daaraan tegengesteld als π oneven is.

(iii) Is A een 1-1 lineaire transformatie, dan behoudt A de oriëntatie, d.w.z. $Ax_1,\ldots,Ax_n$ hebben dezelfde oriëntatie als $x_1,\ldots,x_n$, in geval $\det A > 0$, en A keert de oriëntatie om als $\det A < 0$.

(iv) Is $b_1,\ldots,b_n$ een andere basis van S, dan is de oriëntatie van $x_1,\ldots,x_n$ t.o.v. $b_1,\ldots,b_n$ hetzelfde als (tegengesteld aan) die t.o.v. $a_1,\ldots,a_n$ wanneer $b_1,\ldots,b_n$ positief (resp. negatief) geörienteerd zijn t.o.v. $a_1,\ldots,a_n$.

Bewijs. (i), (ii) en (iii) zijn een direct gevolg van respectievelijk de punten (i), (iv) en (v) van stelling (10.3). Punt (iv) volgt uit de opmerking na de definitie in (10.3).

(10.5) Keren we nu terug tot een ruimte R met inproduct, waarin we een orthonormale basis $e_1,\ldots,e_n$ gekozen hebben. Het geörienteerde volume V t.o.v. deze basis heeft de eigenschap

$$|V(x_1,\ldots,x_n)| = \mathrm{vol}_n(x_1,\ldots,x_n),$$

zoals we in stelling (10.2), (iv) gezien hebben. Het niet geörienteerde volume vol_n is invariant onder orthogonale transformaties. Het geörienteerde volume V is invariant onder rotaties (omdat die determinant 1 hebben), maar wordt bij draaispiegelingen met een factor -1 vermenigvuldigd. Vraag: is het voor $d < n$ ook mogelijk een geörienteerd d-dimensionaal volume te definiëren, d.w.z. een functie $V_d(x_1,\ldots,x_d)$ van d vectoren met de eigenschappen:

1^0 $V_d(x_1,\ldots,x_d) = 0$ dan en slechts dan als $x_1,\ldots,x_d$ lineair afhankelijk zijn.

2^0 $V_d(Ax_1,\ldots,Ax_d) = \det A.V_d(x_1,\ldots,x_d)$ als A een orthogonale transformatie is.

Stel dat het kan. Kies dan, bij gegeven $x_1,\ldots,x_d$, een vector $a \neq o$, $a \perp x_i$ voor $i = 1,\ldots,d$ $(d < n)$. De spiegeling S_a laat dan $x_1,\ldots,x_d$ vast, dus

$$V_d(x_1,\ldots,x_d) = V_d(S_a x_1,\ldots,S_a x_d)$$
$$= -V_d(x_1,\ldots,x_d),$$

omdat $\det S_a = -1$. Dus $V_d(x_1,\ldots,x_d) = 0$ voor alle $x_1,\ldots,x_d$, in strijd met 1^0. Dus: <u>er bestaat voor $d < n$ geen geörienteerd d-dimensionaal volume dat aan 1^0 en 2^0 voldoet</u>. Evenmin is het mogelijk in een n-dimensionale ruimte, voor $d < n$ een oriëntering van de lineair onafhankelijke vectoren te definiëren.

(10.6) We werken nu in de $\mathbb{R}^3$ met standaardinproduct. Voor vaste x_1 en x_2 is $V(x_1,x_2,x_3)$ (= het volume t.o.v. de standaardbasis) een lineaire functie van x_3, dus er is één vector in $\mathbb{R}^3$ te vinden, die we $x_1 \times x_2$ noemen, zodat

$$V(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \times x_2, x_3).$$

<u>DEFINITIE</u>. In de $\mathbb{R}^3$ met standaardinproduct is het <u>uitproduct</u> (of <u>uitwendig product</u>) van vectoren x_1 en x_2 gedefinieerd door

$$(x_1 \times x_2, x_3) = V(x_1,x_2,x_3) \text{ voor alle } x_3 \in \mathbb{R}^3.$$

<u>STELLING. (i) $x_1 \times x_2$ is lineair in x_1 en in x_2, d.w.z.</u>

$$(\lambda x_1 + \mu y_1) \times x_2 = \lambda(x_1 \times x_2) + \mu(y_1 \times x_2)$$
$$x_1 \times (\lambda x_2 + \mu y_2) = \lambda(x_1 \times x_2) + \mu(x_1 \times y_2).$$

<u>(ii) $x_1 \times x_2 = -x_2 \times x_1$ (antisymmetrie).</u>

<u>(iii) $x_1 \times x_2 = o$ dan en slechts dan als x_1 en x_2 lineair afhankelijk zijn</u>.

(iv) $x_1 \times x_2$ is voor lineair onafhankelijke x_1 en x_2 meetkundig bepaald door de volgende eigenschappen: $x_1 \times x_2 \perp x_1$ en x_2, $|x_1 \times x_2| = |x_1||x_2||\sin \phi|$, als ϕ de hoek tussen x_1 en x_2 is, en $x_1, x_2, x_1 \times x_2$ is een positief geörienteerd drietal vectoren.

(v) Als $x_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3})$, dan is

$$x_1 \times x_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

met

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{22} & \xi_{23} \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} \xi_{13} & \xi_{11} \\ \xi_{23} & \xi_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{23} \end{vmatrix},$$

$$\eta_3 = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}.$$

Bewijs. (i) volgt direct uit de lineariteit van $V(x_1, x_2, x_3)$ in elke x_i afzonderlijk.

(ii) $V(x_1, x_2, x_3) = -V(x_2, x_1, x_3)$, dus

$$(x_1 \times x_2, x_3) = (-x_2 \times x_1, x_3) \text{ voor alle } x_3.$$

(iii) Zijn x_1 en x_2 lineair afhankelijk, dan is

$$V(x_1, x_2, x_3) = 0 \text{ voor alle } x_3,$$

d.w.z.

$$(x_1 \times x_2, x_3) = 0 \text{ voor alle } x_3,$$

waaruit volgt dat $x_1 \times x_2 = 0$. Zijn x_1 en x_2 lineair onafhankelijk, dan bestaat er een x_3 zodat x_1, x_2 en x_3 onafhankelijk zijn. Daarvoor is

$$(x_1 \times x_2, x_3) = V(x_1, x_2, x_3) \neq 0,$$

dus $x_1 \times x_2 \neq o$.

(iv) Uit

$$(x_1 \times x_2, x_1) = V(x_1, x_2, x_1) = 0$$

volgt $x_1 \times x_2 \perp x_1$. Analoog $x_1 \times x_2 \perp x_2$. Neem nu $x_3 = x_1 \times x_2$, dan is

$$\begin{aligned} |x_3|^4 &= (x_1 \times x_2, x_3)^2 \\ &= \mathrm{vol}_3(x_1, x_2, x_3)^2 \\ &= |(x_i, x_j)|_{1 \leq i,j \leq 3}. \end{aligned}$$

Nu is $x_3 \perp x_1$ en x_2, dus de determinant wordt

$$\begin{vmatrix} (x_1,x_1) & (x_1,x_2) & 0 \\ (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & (x_3,x_3) \end{vmatrix}$$

$$= |x_3|^2 \, |x_1|^2 \, |x_2|^2 \, (1-\cos^2\phi).$$

Deling door $|x_3|^2$ levert

$$|x_3|^2 = |x_1|^2 |x_2|^2 \, (1-\cos^2\phi)$$

$$|x_3| = |x_1||x_2||\sin\phi|.$$

Tenslotte is

$$V(x_1,x_2,x_1 \times x_2) = (x_1 \times x_2, x_1 \times x_2) > 0,$$

omdat $x_1 \times x_2 \neq 0$. Daaruit volgt dat x_1, x_2 en $x_1 \times x_2$ positief geörienteerd zijn. Laat omgekeerd een vector z de drie genoemde eigenschappen hebben. Uit $z \perp x_1$ en x_2 volgt: $z = \lambda x_1 \times x_2$ voor een $\lambda \in \mathbb{R}$. $|z| = |x_1||x_2||\sin\phi|$ impliceert dat $\lambda = \pm 1$. De positieve oriëntatie van x_1, x_2 en z dwingt $\lambda = 1$ af.

(v) Is $x_1 \times x_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, dan is

$$\eta_1 \xi_{31} + \eta_2 \xi_{32} + \eta_3 \xi_{33} = (x_1 \times x_2, x_3) = V(x_1,x_2,x_3).$$

Door ontwikkelen naar de laatste rij vinden we

$$V(x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{22} & \xi_{23} \end{vmatrix} \xi_{31} - \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{23} \end{vmatrix} \xi_{32} + \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix} \xi_{33}.$$

Door nu voor x_3 achtereenvolgens de basisvectoren (1,0,0), (0,1,0) en (0,0,1) in te vullen, vinden we de gezochte uitdrukkingen voor η_1, η_2 en η_3.

(10.7) In (8.4) hebben we de hoek ϕ met $0 \leqslant \phi < \pi$ tussen twee vectoren $x \neq o$ en $y \neq o$ gedefinieerd door

$$\cos \phi = \frac{(x,y)}{|x||y|}.$$

Dit is dus de niet geörienteerde hoek tussen x en y. We willen nu in de 2-dimensionale ruimte R met inproduct een geörienteerde hoek invoeren met waarden tussen $-\pi$ en π. Kies een orthonormale basis e_1, e_2. Stel $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ en $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2$. Dan is

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}^2 = \mathrm{vol}_2(x,y)^2$$

$$= \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix}$$

$$= |x|^2 |y|^2 (1-\cos^2\phi),$$

$$= |x|^2 |y|^2 \sin^2\phi.$$

De volgende definitie geeft dus een zinvolle bepaling van ϕ.

DEFINITIE. R is een 2-dimensionale ruimte met inproduct, met daarin een orthonormale basis e_1, e_2 gekozen. De geörienteerde hoek ϕ tussen vectoren $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \neq o$ en $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 \neq o$ is bepaald door

$$\cos \phi = |x|^{-1} |y|^{-1} (x,y)$$

$$\sin \phi = |x|^{-1} |y|^{-1} \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = |x|^{-1} |y|^{-1} V(x,y), \quad -\pi < \phi \leqslant \pi.$$

Hierin stelt V het geörienteerde volume t.o.v. de basis e_1, e_2 voor.

Opmerkingen. 1. In plaats van de eis $-\pi < \phi \leqslant \pi$ kan men voor ϕ elk interval ter lengte 2π voorschrijven, of ook ϕ in $\mathbb{R}$ mod 2π definiëren.

2. ϕ hangt niet van de basis e_1, e_2 zelf af, maar alleen van de

oriëntatie van de basis. Bij een orthogonale coördinatentransformatie wordt nl. de determinant $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$ met een factor det A = $= \pm 1$ vermenigvuldigd. Bij omkering van de oriëntatie gaat dus ϕ in $-\phi$ over.

STELLING. De geörienteerde hoek ϕ is invariant onder rotaties, en gaat over in $-\phi$ bij spiegelingen.

Bewijs. Dit volgt weer uit het feit dat bij een orthogonale transformatie A, de determinant $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$ met det A vermenigvuldigd wordt.

In een hoger dimensionale ruimte is het niet mogelijk een geörienteerde hoek ϕ te definiëren, die alleen 0 (of π) is als $y = \lambda x$ met $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$), en die invariant is onder rotaties, en met -1 vermenigvuldigd wordt bij draaispiegelingen. Bestond zo'n hoek, dan namen we voor lineair onafhankelijke x en y een vector $a \perp x,y$. Bij S_a bleven dan enerzijds x en y vast, maar anderzijds ging ϕ over in $-\phi$ omdat det $S_a = -1$. Voor $\phi \neq 0,\pi$ zou dus $\phi = -\phi$ zijn, een tegenspraak.

§11. EIGENWAARDEN EN EIGENVECTOREN.

Zij $A : R \to R$ een lineaire transformatie. Vraag: is er een basis $a_1, \ldots, a_n$ van R te vinden, zodat A t.o.v. die basis door een diagonaalmatrix wordt voorgesteld? Omdat diagonaalmatrices bij allerlei berekeningen veel makkelijker te hanteren zijn dan willekeurige matrices, is een dergelijke matrixvoorstelling van A zeer aantrekkelijk. De vectoren $a_1, \ldots, a_n$ hebben in dat geval de eigenschap:

$$Aa_i = \lambda_i a_i \text{ voor zekere } \lambda_i.$$

Een vector $a \neq o$ met de eigenschap: $Aa = \lambda a$ voor zekere λ, heet een eigenvector van A, en de bijbehorende λ een eigenwaarde. Ons probleem, een diagonaalmatrix voor A te vinden, komt neer op: zoek een basis bestaande uit eigenvectoren van A.

In deze paragraaf mag k zowel $\mathbb{R}$ als $\mathbb{C}$ zijn, tenzij uitdrukkelijk anders vermeld wordt.

(11.1) DEFINITIE. Zij R een lineaire ruimte (van willekeurige dimensie) over k (= $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$), $A : R \to R$ een lineaire transformatie. Een vector $x \neq o$ heet een eigenvector van A, als er een $\lambda \in k$ bestaat zodat

$$Ax = \lambda x.$$

λ heet de, bij x behorende, eigenwaarde van A.

We zullen aantonen dat voor $k = \mathbb{C}$ en dim R eindig geldt: A heeft tenminste één eigenvector. Voor $k = \mathbb{R}$ hoeft dit niet het geval te zijn; denk bijvoorbeeld aan een draaiing in $\mathbb{R}^2$ over een hoek $\neq 0, \pi$. Ook voor dim $R = \infty$ kan men niet altijd eigenvectoren $\neq o$ vinden. Neem bijvoorbeeld $R = k^\infty$ als in (2.15),

en

$$A : (\xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Uit $Ax = \lambda x$ volgt dan $x = o$ (ga na!).

WE BEPERKEN ONS VERDER IN DEZE PARAGRAAF TOT LINEAIRE RUIMTEN VAN EINDIGE DIMENSIE (ZOWEL REËLE ALS COMPLEXE), TENZIJ UITDRUKKELIJK ANDERS VERMELD WORDT.

(11.2) Zij $A : R \to R$ een lineaire transformatie. Een vector $x \neq o$ is eigenvector van A, met eigenwaarde λ, wanneer

$$Ax = \lambda x,$$

dus als

$$(A-\lambda I)x = o.$$

Dit kan men, bij gegeven λ, opvatten als een stelsel van n homogene lineaire vergelijkingen in n onbekenden ($n = \dim R$). Zoals bekend, heeft dit precies dan een oplossing $x \neq o$, als $\det(A-\lambda I) = 0$. De mogelijke eigenwaarden λ van A zijn dus blijkbaar de wortels van de vergelijking

$$\det (A-tI) = 0, \text{ (t een variabele)},$$

de zogenaamde eigenwaardevergelijking of karakteristieke vergelijking van A (in de astronomie ook wel seculiere vergelijking genoemd). We kiezen nu een basis in R, waarbij A door de matrix $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ wordt voorgesteld. Dan zien we

$$\det (A-tI) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-t & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-t & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}-t \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\pi} sg(\pi)(\alpha_{1,\pi 1}-\delta_{1,\pi 1}t)(\alpha_{2,\pi 2}-\delta_{2,\pi 2}t)\ldots(\alpha_{n,\pi n}-\delta_{n,\pi n}t)$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}\gamma_1 t^{n-1} + (-1)^{n-2}\gamma_2 t^{n-2} + \ldots + \gamma_n.$$

We noemen dit n-de graads polynoom het <u>eigenwaardepolynoom</u> of <u>karakteristieke polynoom</u> (<u>seculiere -</u>) van A. Wat zijn precies de coëfficienten γ_i, die daarin voorkomen? Zonder veel moeite ziet men in dat

$$\gamma_n = \det A,$$
$$\gamma_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = sp(A),$$

het <u>spoor</u> van A. Algemeen vinden we de γ_i als volgt.

Splits elke kolom van A-tI in twee stukken:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{jj}-t \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{jj} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dit levert een uitdrukking voor det (A-tI) op als som van een aantal determinanten, die elk in een aantal (zeg i) kolommen op de diagonaal -t hebben staan en verder nullen, en in de resterende kolommen de coëfficienten α_{ij} van A:

$$(*) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,j_1-1} & 0 & \alpha_{1,j_1+1} & \cdots & \alpha_{1,j_2-1} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & & & 0 & & & & 0 & \\ & & & -t & & & & -t & \\ & & & 0 & & & & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{n1} & & \alpha_{n,j_1-1} & 0 & \alpha_{n,j_1+1} & & \alpha_{n,j_2-1} & 0 & \end{vmatrix}$$

We voeren nu de volgende notatie in:

$A^{(j_1,\ldots,j_i)}$ = de matrix die we uit A verkrijgen door daaruit de rijen en kolommen met rangnummer $j_1, j_2, \ldots$ t/m j_i te schrappen $(1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_i \leqslant n)$.

<u>Let op</u>. Verwar dit niet met de submatrix $A_{i,j}$ van $\alpha_{i,j}$, die we krijgen door schrappen van de i-de rij en de j-de kolom. Het enige verband tussen de twee notaties is, dat $A_{j,j} = A^{(j)}$.

De determinant (*) berekenen we nu als volgt. Door vegen met de j_1-de kolom maken we alle $\alpha_{j_1,l}$ met $l \neq j_1$ gelijk aan 0; analoog vegen we met de j_2-de t/m j_i-de kolom de j_2-de t/m j_i-de rij schoon, buiten de hoofddiagonaal. Vervolgens passen we achtereenvolgens voor $l = 1,\ldots,i$, de permutatie

$$\pi_l = (l,l+1)(l+1,l+2)\ldots(j_l-1,j_l)$$

toe op de rijen én op de kolommen van de geveegde matrix. Daarbij wordt de determinant telkens met $(\text{sg } \pi_l)^2 = 1$ vermenigvuldigd. We vinden zo dat de waarde van de determinant (*) gelijk is aan

$$\left|\begin{array}{c|c} -t & \\ & -t \quad 0 \\ & \ddots \\ 0 & \quad -t \\ \hline 0 & A^{(j_1,\ldots,j_i)} \end{array}\right| = (-1)^i t^i \det A^{(j_1,\ldots,j_i)}.$$

Daaruit volgt voor de karakteristieke veelterm, dat

$$\gamma_i = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_i \leq n} \det A^{(j_1,\ldots,j_i)}.$$

DEFINITIE. Een i × i-hoofdonderdeterminant van A is een determinant van de vorm

$$\det A^{(j_1,\ldots,j_i)},$$

waarin $A^{(j_1,\ldots,j_i)}$ de matrix voorstelt die we uit A krijgen door daaruit de rijen en kolommen met rangnummer $j_1,\ldots,j_i$ te schrappen.

Alles bij elkaar hebben we nu dus bewezen.

STELLING. (i) De eigenwaarden van A zijn de wortels van de vergelijking

$$\det (A-tI) = 0$$ (karakteristieke vergelijking of eigenwaardevergelijking).

(ii) Is λ een eigenwaarde van A, dan zijn de bijbehorende eigenvectoren de oplossingen $\neq o$ van

$$(A-\lambda I)x = o.$$

(iii) $\det(A-tI) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i}\gamma_i\, t^{n-i}$ (eigenwaarde polynoom of karakteristieke veelterm) met

$$\gamma_i = \Sigma(i \times i\text{-hoofdonderdeterminanten van A}).$$

(11.3) Wat gebeurt er met de karakteristieke veelterm, als we de matrix van A t.o.v. een andere basis schrijven? Niets, want $\det(A-tI)$ hangt alleen af van de lineaire afbeelding $A-tI$. Omdat overgang op een andere basis neerkomt op vervanging van de matrix A_0 van A door een matrix $S_0^{-1}A_0S$, betekent dit dat deze twee matrices dezelfde karakteristieke veelterm hebben. We kunnen dit ook nog anders zien.

STELLING. Is $A : R \to R$ een lineaire afbeelding en $S : R \to R$ een inverteerbare lineaire afbeelding, dan is

$$\det(S^{-1}AS-tI) = \det(A-tI).$$

Bewijs. $\det(S^{-1}AS-tI) = \det(S^{-1}(A-tI)S)$

$= (\det S)^{-1}\det(A-tI)\det S$

$= \det(A-tI).$

Hieruit volgt dus: γ_i, de som van de $i \times i$-hoofdonderdeterminanten van een matrix A_0, is dezelfde als van $S_0^{-1}A_0S_0$, S_0 inverteerbaar. Voor $i = n$ was dit al bekend: $\gamma_n = \det A_0$. Voor $i = 1$ betekent dit: $\mathrm{sp}(S_0^{-1}A_0S_0) = \mathrm{sp}(A_0)$.

(11.4) Heeft de eigenwaarde vergelijking van A een wortel, dan

vinden we eigenvectoren $\neq o$. Volgens de hoofdstelling van de algebra heeft een veelterm met coëfficienten in $\mathbb{C}$ altijd minstens één nulpunt in $\mathbb{C}$. Dus voor $k = \mathbb{C}$ is er altijd minstens één eigenwaarde, dus ook minstens één eigenvector. We willen echter een basis van eigenvectoren van A proberen te vinden. De volgende stelling helpt ons daarbij op weg. Daarin mag $k = \mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ zijn.

STELLING. Zijn $x_1,\ldots,x_s$ eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$, respectievelijk, van A, dan zijn $x_1,\ldots,x_s$ lineair onafhankelijk.

Bewijs. Stel, $x_1,\ldots,x_s$ zijn lineair afhankelijk. Onder alle mogelijke relaties

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_s x_s = o, \text{ met alle } \alpha_i = 0,$$

zoeken we er één die zo kort mogelijk is, d.w.z. met zo min mogelijk $\alpha_i \neq 0$. Zij (na eventueel hernummeren van de x_i)

$$(*)\quad \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_t x_t = o, \text{ alle } \alpha_i \neq 0,$$

zo'n korte relatie. Dan is $t > 1$, omdat alle $x_i \neq o$. Verder is

$$A(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_t x_t) = o,$$

dus

$$\lambda_1\alpha_1 x_1 + \lambda_2\alpha_2 x_2 + \ldots + \lambda_t\alpha_t x_t = o.$$

Anderzijds levert vermenigvuldiging van de vergelijking (*) met λ_1 de volgende relatie.

$$\lambda_1\alpha_1 x_1 + \lambda_1\alpha_2 x_2 + \ldots + \lambda_1\alpha_t x_t = o.$$

Aftrekken van de laatste twee vergelijkingen geeft

$$(\lambda_2-\lambda_1)\alpha_2 x_2 + \ldots + (\lambda_t-\lambda_1)\alpha_t x_t = o.$$

Hierin is $(\lambda_i-\lambda_1)\alpha_i \neq 0$ voor $i = 2,\ldots,t$, dus we hebben een nog kortere relatie gevonden, in strijd met de aanname dat we een kortste relatie genomen hadden. Dus moeten $x_1,\ldots,x_s$ lineair onafhankelijk zijn.

Gevolg. Is dim R = n en heeft de karakteristieke veelterm det (A-tI) van A : R → R precies n verschillende wortels, dan is er in R een basis van eigenvectoren van A.

DEFINITIE. Een lineaire transformatie A : R → R heet diagonaliseerbaar, als er in R een basis van eigenvectoren van A bestaat.

T.o.v. een basis van eigenvectoren van A krijgen we als matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

waarin $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A zijn. Let wel, als det (A-tI) niet n verschillende wortels heeft, dan kan A nog best diagonaliseerbaar zijn. Voor A = I is bijvoorbeeld $\lambda = 1$ de enige eigenwaarde, maar A is beslist wel diagonaliseerbaar voor $n > 1$.

Dat er inderdaad niet diagonaliseerbare lineaire transformaties bestaan, leert het volgende voorbeeld in k^2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Karakteristieke vergelijking:

$$(1-t)^2 = 0.$$

Enige eigenwaarde: $\lambda = 1$.

Eigenvectoren: $x = (\xi_1, \xi_2)$ met

$$(A-I)x = o.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = o.$$

$$\xi_2 = 0.$$

Dus alle eigenvectoren zijn een veelvoud van (1,0), en A is niet diagonaliseerbaar. We hadden dat ook anders in kunnen zien. A heeft als enige eigenwaarde $\lambda = 1$, dus was A diagonaliseerbaar,

dan bestond er een inverteerbare 2 × 2-matrix S zodat

$$A = SIS^{-1} = I,$$

wat een tegenspraak oplevert.

(11.5) DEFINITIE. Een n × n-matrix A_0 heet diagonaliseerbaar als de door A_0 gedefinieerde lineaire transformatie $k^n \to k^n$ diagonaliseerbaar is, dus als er een inverteerbare n × n-matrix S_0 en een diagonaalmatrix

$$\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

bestaan zodat

$$A_0 = S_0^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)S_0.$$

(11.6) Wat doen we, als A niet diagonaliseerbaar blijkt te zijn? Een oorzaak voor dit mankement kan zijn: k = $\mathbb{R}$ en bepaalde wortels van de eigenwaarde vergelijking det (A-tI) = 0 zijn niet reëel. Hier kan iets aan gedaan worden door k uit te breiden tot $\mathbb{C}$. Dan moet R uitgebreid worden tot een complexe lineaire ruimte, en A tot een complexe lineaire afbeelding. We zullen deze uitbreidingen nu gaan controleren.

Zij R een reële lineaire ruimte (van willekeurige dimensie). Als elementen van $R_{\mathbb{C}}$ nemen we de paren

$\ulcorner x,y \urcorner$ met x en y $\in$ R.

Optelling wordt in R gedefinieerd door

$$\ulcorner x,y \urcorner + \ulcorner u,v \urcorner = \ulcorner x+u, y+v \urcorner.$$

Scalaire vermenigvuldiging met elementen van $\mathbb{C}$ definiëren we als volgt. Is $\lambda+i\mu \in \mathbb{C}$, met λ en $\mu \in \mathbb{R}$ en $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, dan is

$$(\lambda+i\mu)\lceil x,y\rceil = \lceil \lambda x-\mu y, \mu x+\lambda y\rceil.$$

[Merk op dat we de definities zo kiezen, dat $\lceil x,y\rceil$ zoiets als $x+iy$ betekent; we willen deze laatste notatie echter nu nog niet gebruiken, om verwarring te voorkomen]. Men gaat gemakkelijk na, dat $R_{\mathbb{C}}$ met bovenstaande optelling en scalaire vermenigvuldiging voldoet aan de axioma's voor een complexe lineaire ruimte. De afbeelding

$$x \mapsto \lceil x,o\rceil$$

van R in $R_{\mathbb{C}}$ is 1-1, en lineair over $\mathbb{R}$. Bedenk hierbij, dat $R_{\mathbb{C}}$ ook een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ is, aangezien $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. We vatten deze afbeelding op als een identificatie, d.w.z. we beschouwen R verder als deel van $R_{\mathbb{C}}$, en identificeren $\lceil x,o\rceil$ met x (voor $x \in R$).

DEFINITIE. De complexe lineaire ruimte $R_{\mathbb{C}}$ als boven geconstrueerd heet de complexificatie van de reële lineaire ruimte R. R vatten we op als deel van $R_{\mathbb{C}}$.

Voor $x \in R$ is, volgens definitie,

$$i\lceil x,o\rceil = \lceil o,x\rceil.$$

We kunnen derhalve ix schrijven voor $\lceil o,x\rceil$. Dan is

$$\lceil x,y\rceil = x+iy,$$

m.a.w. iedere vector uit $R_{\mathbb{C}}$ is op precies één manier te schrijven als som van een vector x uit R en een vector iy met $y \in R$.

DEFINITIE. Zijn R en S reële lineaire ruimten, en is $A : R \to S$ een lineaire afbeelding, dan is de complexificatie $A_{\mathbb{C}}$ van A de afbeelding $A_{\mathbb{C}} : R_{\mathbb{C}} \to S_{\mathbb{C}}$ met

$$A_{\mathbb{C}}\lceil x,y\rceil = \lceil Ax,Ay\rceil.$$

Men verifieert gemakkelijk dat $A_{\mathbb{C}}$ een complexe lineaire afbeelding is. Het is de enige lineaire afbeelding van $R_{\mathbb{C}}$ in $S_{\mathbb{C}}$ met de eigenschap, dat z'n restrictie tot R (opgevat als deel van $R_{\mathbb{C}}$) precies de gegeven lineaire afbeelding $A : R \to S$ oplevert. In plaats van $A_{\mathbb{C}}$ schrijft men wel kortweg A, als geen verwarring mogelijk is. Ga na, dat voor lineaire afbeeldingen A en B geldt: $(AB)_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{C}}B_{\mathbb{C}}$, $(A^{-1})_{\mathbb{C}} = (A_{\mathbb{C}})^{-1}$ (als AB resp. A^{-1} bestaat).

Beschouw nu de complexificatie $(\mathbb{R}^n)_{\mathbb{C}}$ van $\mathbb{R}^n$. De afbeelding

$$\ulcorner(\xi_1,\ldots,\xi_n),(\eta_1,\ldots,\eta_n)\urcorner \mapsto (\xi_1+i\eta_1,\ldots,\xi_n+i\eta_n)$$

van $(\mathbb{R}^n)_{\mathbb{C}}$ in $\mathbb{C}^n$ blijkt bij narekenen een complex lineair isomorfisme te zijn; ga na! We zullen verder steeds $(\mathbb{R}^n)_{\mathbb{C}}$ met $\mathbb{C}^n$ identificeren via deze afbeelding, m.a.w. we vatten $\mathbb{C}^n$ op als complexificatie van $\mathbb{R}^n$.

Beschouwen we nu verder alleen eindig-dimensionale lineaire ruimten. Is $e_1,\ldots,e_n$ een basis van R over $\mathbb{R}$, dan is het ook een basis van $R_{\mathbb{C}}$ over $\mathbb{C}$. Iedere vector z uit $R_{\mathbb{C}}$ is nl. op precies één manier te schrijven als x+iy met x en y uit R. Als $x = \sum_j \xi_j e_j$ en $y = \sum_j \eta_j e_j$ (op één manier mogelijk), dan is

$$z = x+iy = \sum_j (\xi_j+i\eta_j)e_j,$$

welke schrijfwijze eenduidig is, zoals men eenvoudig nagaat. We noemen een basis van R ook wel een reële basis van $R_{\mathbb{C}}$. Let op, niet iedere basis van $R_{\mathbb{C}}$ is reëel!

Zij $T : R \to \mathbb{R}^n$ de bij $e_1,\ldots,e_n$ behorende coördinatiseringsafbeelding, d.w.z. $Te_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ met 1 op de j-de plaats. Vatten we $e_1,\ldots,e_n$ op als basis van $R_{\mathbb{C}}$ over $\mathbb{C}$, dan is $T_{\mathbb{C}} : R_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^n$ de bijbehorende coördinatiseringsafbeelding; ga dit na.

Is A een reële lineaire afbeelding $R \to S$, die t.o.v. bases $e_1,\ldots,e_r$ van R en $f_1,\ldots,f_s$ van S voorgesteld wordt door de matrix A_0, dan is A_0 ook de matrix van $A_{\mathbb{C}}$ t.o.v. de bases $e_1,\ldots,e_r$ van $R_{\mathbb{C}}$ en $f_1,\ldots,f_s$ van $S_{\mathbb{C}}$.

Is $z = x+iy$ met x en $y \in R$, dan is de <u>complex geconjugeerde vector</u> $\overline{z}$ gedefinieerd door

$$\overline{z} = x - iy.$$

Voor $z = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ komt dit neer op

$$\overline{z} = (\overline{\zeta}_1,\ldots,\overline{\zeta}_n).$$

Algemeen geldt: als $e_1,\ldots,e_n$ een basis van R is, dus een reële basis van $R_{\mathbb{C}}$, dan is voor $z = \sum_j \zeta_j e_j$,

$$\overline{z} = \sum_j \overline{\zeta}_j e_j.$$

Is $A : R \to S$ een reële lineaire transformatie, dan is

$$A_{\mathbb{C}}\overline{z} = \overline{A_{\mathbb{C}} z}.$$

Geef zelf bewijzen voor al deze beweringen.

Is $A : R \to R$ een reële lineaire transformatie, dan volgt uit het feit dat A en $A_{\mathbb{C}}$ dezelfde matrix hebben t.o.v. een basis van R, dat A en $A_{\mathbb{C}}$ hetzelfde karakteristieke polynoom hebben. Immers,

$$\det (A_{\mathbb{C}} - tI_{\mathbb{C}}) = \det (A-tI)$$

voor een reële variabele t; bedenk verder dat twee complexe veeltermen in t, die voor alle reële t dezelfde waarde aannemen, dezelfde coëfficienten moeten hebben.

(11.7) In een complexe lineaire ruimte zijn we er in elk geval zeker van, dat de veelterm det (A-tI) in lineaire factoren te ontbinden is, zoals volgt uit de hoofdstelling van de algebra. We schrijven

$$\det (A-tI) = (\lambda_1 - t)^{m_1} (\lambda_2 - t)^{m_2} \ldots (\lambda_s - t)^{m_s},$$

waarin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ de verschillende eigenwaarden van A zijn. m_i heet de multipliciteit van λ_i. Het is duidelijk dat $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$. Als alle $m_i = 1$ zijn, dan is er geen vuiltje aan de lucht: er zijn dan n lineair onafhankelijke eigenvectoren, dus A is diagonaliseerbaar.

We zullen nu het geval gaan onderzoeken dat A eigenwaarden met een multipliciteit > 1 heeft. R is weer eindig dimensionaal, reëel of complex.

(11.8) DEFINITIE. Zij $A : R \to R$ een lineaire afbeelding, en zij L een lineaire deelruimte van R zodat $AL \subseteq L$. A induceert dan een lineaire afbeelding

$$A_{\text{mod } L} : R/L \to R/L$$

met $A_{\text{mod } L}(x+L) = Ax + L$.

Als $x+L = y+L$, dan is $x = y+l$, dus $Ax = Ay + Al \in Ay + L$, dus $Ax+L = Ay+L$. De definitie van $A_{\text{mod } L}$, zoals hierboven gegeven, is dus ondubbelzinnig (Merk op, dat we in (6.4) iets gedaan hebben, wat hier wel wat op lijkt, bij de definitie van wat daar A_N heette. Ga zelf de overeenkomsten en de verschillen met de huidige situatie na.)

Notatie. Is $A : R \to R$ een lineaire afbeelding, dan schrijven we voor de karakteristieke veelterm van A ook wel χ_A:

$$\chi_A(t) = \det(A-tI).$$

STELLING. Is $A : R \to R$ lineair en L een invariante deelruimte van R, d.w.z. $AL \subseteq L$, dan is

$\chi_A = \chi_{A|L} \cdot \chi_{A_{\text{mod } L}}$

(A|L = de restrictie van A tot $L \to L$).

Bewijs. Kies een basis $e_1,\ldots,e_n$ van R zodat $e_1,\ldots,e_d$ een basis van L is. Zij B de matrix van A|L t.o.v. $e_1,\ldots,e_d$. Een basis van R/L is $e_{d+1}+L,\ldots,e_n+L$; zij C de matrix van $A_{\text{mod } L}$ t.o.v. deze basis. Dan is dus voor $d < j \leqslant n$:

$$A_{\text{mod } L}(e_j+L) = \sum_{l=d+1}^{n} \gamma_{lj}(e_l+L),$$

als $C = (\gamma_{lj})$. Dus voor $d < j \leqslant n$ vinden we uitdrukkingen

$$Ae_j = \sum_{l=d+1}^{n} \gamma_{lj}e_l + \sum_{i=1}^{d} \alpha_{il}e_i.$$

Daaruit volgt dat de matrix voor A er uitziet als

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

waarin D een $d \times (n-d)$-matrix is. Dan is

$$\det (A-tI) = \begin{vmatrix} B-tI & D \\ 0 & C-tI \end{vmatrix}$$

$$= \det (B-tI)\det (C-tI),$$

d.w.z.

$$\chi_A(t) = \chi_{A|L}(t) \cdot \chi_{A_{\text{mod } L}}(t).$$

(11.9) Stel λ is een eigenwaarde van A met multipliciteit $m > 1$. Zij V de lineaire deelruimte van R bestaande uit de eigenvectoren bij λ en de nulvector:

$$V = \{x \in R \mid Ax = \lambda x\}.$$

Neem aan dat $\dim V = s < m$. We bekijken dan $A_{\text{mod } V}$. Wegens (11.8) is

$$\chi_A(t) = \chi_{A|V}(t) \cdot \chi_{A_{\text{mod } V}}(t)$$

$$= (\lambda-t)^s \chi_{A_{\text{mod } V}}(t).$$

Immers, $A|V = \lambda.\mathrm{id}_V$, dus

$$\chi_{A|V}(t) = \det ((\lambda-t)I) = (\lambda-t)^s.$$

Omdat $s < m$, heeft $\chi_{A \text{ mod } V}$ een wortel λ, met multipliciteit $m' = m-s$. Zij V' de deelruimte van R/V bestaande uit de eigenvectoren van $A_{\text{mod } V}$ behorende bij de eigenwaarde λ, en o. Dan is voor $x \in R$,

$$x + V \in V' \Leftrightarrow Ax-\lambda x \in V$$

$$\Leftrightarrow (A-\lambda I)^2 x = o.$$

Is $\dim V' < m' = m-s$, dan herhalen we bovenstaande procedure: we vinden dan een ruimte V'' van o en de eigenvectoren van $A_{\text{mod } V'}$ in R/V'. Daarvoor geldt:

$$x + V' \in V'' \Leftrightarrow Ax-\lambda x \in V'$$

$$\Leftrightarrow (A-\lambda I)^3 x = o.$$

Na eindig veel stappen breekt dit proces af. We vinden daarmee het volgende resultaat.

STELLING. Zij $A : R \to R$ een lineaire afbeelding en λ een eigenwaarde van A met multipliciteit m. De lineaire deelruimte $V^{(\lambda)}$ gedefinieerd door

$$V^{(\lambda)} = \{x \in R \mid \exists i \text{ zodat } (A-\lambda I)^i x = o\}$$

$$= \{x \in R \mid (A-\lambda I)^n x = o\}$$

heeft dan dimensie m.

(11.10) STELLING. Zij $A : R \to R$ een lineaire afbeelding met als karakteristieke veelterm

$$\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)^{m_1} \ldots\ldots (\lambda_s - t)^{m_s},$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de verschillende eigenwaarden van A. Zij $V_i = V^{(\lambda_i)}$ als in stelling (11.9). Dan geldt:

(i) $AV_i \subseteq V_i$ voor alle i.

(ii) Voor $i \neq j$ is $A-\lambda_j | V_i$ een 1-1 lineaire transformatie.

(iii) Voor $x_i \in V_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $x_i \neq o$ geldt: $x_1, \ldots, x_s$ zijn lineair onafhankelijk.

(iv) $R = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$.

Bewijs. (i) Voor $x \in V_i$ is

$$(A-\lambda_i)^n Ax = A(A-\lambda_i)^n x = o,$$

dus ook $Ax \in V_i$.

(ii) De enige eigenwaarde van A op $V_i = V^{(\lambda_i)}$ is λ_i, d.w.z. $\chi_{A|V_i} = (\lambda_i - t)^{m_i}$. Derhalve heeft voor $j \neq i$, $(A-\lambda_j I)|V_i$ een determinant $\neq 0$, dus is 1-1.

(iii) Stel er is een lineaire relatie

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_s x_s = o.$$

Omdat $(A-\lambda_j I)|V_i$ 1-1 is, is $(A-\lambda_j I)^n x_i \neq o$ voor $i \neq j$. Uit (i) volgt dat $(A-\lambda_j I)x_i \in V_i$. Verder is $(A-\lambda_j I)^n x_j = o$. Dus

$$o = \Big(\prod_{j\neq i} (A-\lambda_j I)^n\Big)(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_i x_i + \ldots + \alpha_s x_s)$$

$$= \alpha_i \Big(\prod_{j\neq i} (A-\lambda_j I)^n\Big) x_i.$$

Omdat $\Big(\prod_{j\neq i} (A-\lambda_j I)^n\Big) x_i \neq o$, is $\alpha_i = 0$. Daar dit voor elke $i = 1, \ldots, s$ geldt, zijn $x_1, \ldots, x_s$ lineair onafhankelijk.

(iv) Uit (iii) volgt dat $V_1 + \ldots + V_s$ een directe som is. Maar

$$\dim (V_1 \oplus \ldots \oplus V_s) = m_1 + \ldots + m_s = n = \dim V,$$

dus

$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_s = V.$$

(11.11) We houden dezelfde notatie aan als in de vorige stelling. In elke V_i kiezen we een basis op de volgende manier. Neem eerst een maximaal stelsel lineair onafhankelijke eigenvectoren $e_{i,1}, \ldots, e_{i,s_1}$. Zij V_i' de deelruimte opgespannen door deze vectoren. Als $V_i' \neq V_i$, kiezen we in V_i/V_i' een maximaal stelsel lineair onafhankelijke eigenvectoren $e_{i,s_1+1} + V_i', \ldots, e_{i,s_2} + V_i'$ van

$A_{\text{mod } V_i'}$. Enzovoort. Na eindig veel stappen krijgen we zo een basis $e_{i,1},\ldots,e_{i,m_i}$ van V_i, zodat $A|V_i$ op deze basis een matrix van de vorm

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & * & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

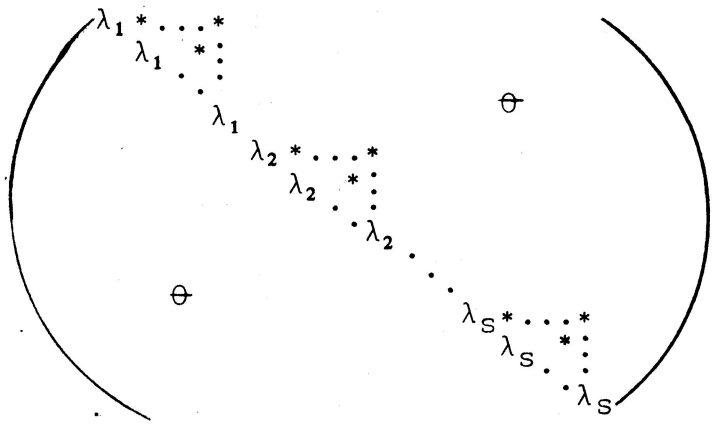
heeft. Hierin betekent $*$, dat de α_{ij} voor $j > i$ willekeurig mogen zijn.

We zetten nu deze bases van de V_i op een rijtje, voor achtereenvolgens $i = 1,2,\ldots,s$. Dan wordt A voorgesteld door een matrix, opgebouwd uit blokken $(*)$ langs de diagonaal, en verder nullen. Daarmee is bewezen.

STELLING. Zij $A : R \to R$ een lineaire transformatie met de verschillende eigenwaarden $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$. Stel λ_i heeft de multipliciteit m_i. Dan heeft R een basis, samengesteld uit bases van de deelruimten

$$V_i = \{x \in R | (A-\lambda_i I)^n x = o\},$$

zodat A voorgesteld wordt door een matrix



Elke λ_i komt precies m_i maal voor op de diagonaal. We noemen dit de driehoeksgedaante van A.

(11.12) Door de situatie in de ruimten V_i wat nauwkeuriger te analyseren, kan men het bovenstaande resultaat nog verfijnen. We voeren dit hier niet uit en volstaan met het vermelden van het resultaat. De belangstellende lezer zij voor het bewijs verwezen naar de literatuur, of naar de practicumopgaven.

STELLING. Notaties als in de vorige stelling. De basis van R, samengesteld uit bases van de deelruimten V_i, kan zo gekozen worden dat A voorgesteld wordt door een matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix}$$

waarin A_i de matrix van $A|V_i$ is, en waarin elke A_i van de volgende gedaante is:

$$A_i = \begin{pmatrix} B_{i,1} & & & \\ & B_{i,2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{i,t_i} \end{pmatrix}$$

met $1 \leqslant t_i \leqslant m_i = \dim V_i$, en elke $B_{i,j} = (\lambda_i)$ of

$$B_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 \\ & & \lambda_i & 1 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

De matrices $B_{i,j}$ in A_i zijn op volgorde na eenduidig bepaald. Men noemt deze matrix voor A een Jordan normaalvorm van A.

(11.13) Een ander resultaat dat men uit (11.11) kan afleiden door nader onderzoek, vermelden we eveneens zonder bewijs. Eerst even een verklaring van de notatie. Is

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n$$

een veelterm in t met coëfficienten $\alpha_i \in k$, en is $A : R \to R$ een lineaire transformatie, dan verstaan we onder $f(A)$ de lineaire transformatie $R \to R$ die we krijgen door t te vervangen door A, en α_0 door $\alpha_0 I$:

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_n A^n.$$

STELLING. (Cayley-Hamilton). Is $A : R \to R$ een lineaire transformatie met karakteristieke veelterm χ_A, dan is

$$\chi_A(A) = 0.$$

Anders gezegd: een lineaire transformatie van een ruimte in zichzelf voldoet aan z'n eigen karakteristieke vergelijking!

(11.14) Tot slot van deze paragraaf willen we enkele resultaten geven over eigenvectoren in reële lineaire ruimten, en daarmee samenhangende problemen. Ter voorbereiding enige opmerkingen over inproducten.

Zij R een reële lineaire ruimte met inproduct (,). We zetten dit inproduct tot de complexificatie $R_{\mathbb{C}}$ van R voort door de afspraak

$$(x+iy,x'+iy') = (x,x')-(y,y')+\{(x,y')+(y,x')\}i \text{ voor}$$

$x,x',y,y' \in R$.

Dat wil zeggen, als we in R een basis $e_1,\ldots,e_n$ kiezen, en

$$(x,x') = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\xi_i\xi'_j \text{ voor } x = \sum_i \xi_i e_i \in R \text{ en } x' = \sum_j \xi'_j e_j \in R,$$

dan is

$$(z,z') = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\zeta_i\zeta'_j \text{ voor } z = \sum_i \zeta_i e_i \in R_{\mathbb{C}} \text{ en } z' = \sum_j \zeta'_j e_j \in R_{\mathbb{C}}.$$

Ook in $R_{\mathbb{C}}$ is (z,z') lineair in elk van de variabelen z en z'

afzonderlijk, en symmetrisch. Maar pas op, uit $(z,z) = 0$ volgt in $R_{\mathbb{C}}$ niet noodzakelijk dat $z = o$. Geef zelf een voorbeeld hiervan. Is A een symmetrische lineaire transformatie van R in zichzelf, d.w.z.

$$(Ax,x') = (x,Ax') \text{ voor alle } x,x' \in R,$$

dan is ook $A_{\mathbb{C}}$ symmetrisch in $R_{\mathbb{C}}$, d.w.z.

$$(A_{\mathbb{C}}z,z') = (z,A_{\mathbb{C}}z') \text{ voor alle } z,z' \in R_{\mathbb{C}}.$$

Toon dit zelf aan. Analoog voor orthogonale transformaties $A : R \to R$. Daarvoor geldt eveneens:

$$(A_{\mathbb{C}}z,A_{\mathbb{C}}z') = (z,z') \text{ voor alle } z,z' \in R_{\mathbb{C}},$$

d.w.z. ook $A_{\mathbb{C}}$ is orthogonaal.

Opmerking. Veelal beschouwt men in $R_{\mathbb{C}}$ het unitaire inproduct

$$\langle z,z' \rangle = (z,\overline{z}') \text{ voor } z,z' \in R_{\mathbb{C}}.$$

Dit is lineair in z, maar niet in z'. Er geldt nl. wel

$$\langle z,z_1'+z_2' \rangle = \langle z,z_1' \rangle + \langle z,z_2' \rangle,$$

maar

$$\langle z,\lambda z' \rangle = \overline{\lambda} \langle z,z' \rangle .$$

Voor $z = x+iy$, $z' = x'+iy'$, met $x,x',y,y' \in R$, is

$$\langle z,z' \rangle = (x,x')+(y,y')+i\{(y,x')-(x,y')\},$$

dus i.h.b.

$$\langle z,z \rangle = (x,x) + (y,y).$$

Daaruit volgt dat $\langle z,z \rangle = 0$ impliceert dat $z = o$. We komen in het dictaat Algebra II uitvoeriger terug op unitaire inproducten in complexe lineaire ruimten.

(11.15) We willen nu de eenvoudige gedaante van een symmetrische reële matrix bepalen. Daartoe beschouwen we deze als matrix (t.o.v. een orthonormale basis) van een symmetrische lineaire

afbeelding A in een ruimte R met inproduct. Eerst een lemma.

LEMMA. Zij R een reële ruimte met inproduct, $A : R \to R$ een symmetrische lineaire transformatie. Geldt voor een lineaire deelruimte L van R, dat $AL \subseteq L$, dan is ook $AL^{\perp} \subseteq L^{\perp}$.

Bewijs. Stel $y \in L^{\perp}$. Voor alle $x \in L$ is, wegens $Ax \in L$,

$$0 = (Ax,y) = (x,Ay).$$

Dus $Ay \in L^{\perp}$.

STELLING. Zij R een reële ruimte met inproduct, $A : R \to R$ een symmetrische lineaire transformatie. Dan is er een orthonormale basis in R bestaande uit eigenvectoren van A. M.a.w., een reële symmetrische matrix kan door een orthogonale coördinatentransformatie op diagonaalgedaante gebracht worden, waarbij alle eigenwaarden reëel zijn.

Bewijs. We breiden R uit tot z'n complexificatie $R_{\mathbb{C}}$, en zetten het inproduct van R tot $R_{\mathbb{C}}$ voort zoals in (11.14) beschreven is. Zij λ een eigenwaarde van A in $R_{\mathbb{C}}$, met bijbehorende eigenvector x. Uit

$$Ax = \lambda x$$

volgt

$$A\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\ \overline{x}.$$

Nu is wegens de symmetrie van A

$$(Ax,\overline{x}) = (x,A\overline{x}),$$

dus

$$\lambda(x,\overline{x}) = \overline{\lambda}(x,\overline{x}).$$

Aangezien $x \neq o$, is $(x,\overline{x}) \neq 0$ (zie Opmerking in (11.14)); daaruit volgt: $\lambda = \overline{\lambda}$. Dus alle eigenwaarden van A zijn reëel.

Zij nu λ een (reële) eigenwaarde van A, met daarbij een eigenvector $x \in R$. We nemen $e_1 = |x|^{-1}x$, dan is e_1 eigenvector met lengte 1. Uit $A < e_1 > \subseteq < e_1 >$ volgt

$$A < e_1 >^{\perp} \subseteq < e_1 >^{\perp} .$$

$< e_1 >^{\perp}$ is een ruimte met inproduct van lagere dimensie dan R, waarin de restrictie van A een symmetrische lineaire transformatie induceert. Met volledige inductie kan men nu het bewijs voltooien.

We bekijken nu een positief definiete symmetrische matrix A; zie (8.10). Door een orthogonale coördinatentransformatie S brengen we A op diagonaalgedaante:

$$A = S^{-1}BS = S'BS,$$

waarin B een diagonaalmatrix is. Merk op: omdat voor orthogonale S geldt dat $S' = S^{-1}$, doet het er hier niet toe of we A als matrix voor een lineaire afbeelding, dan wel als matrix van een inproduct (zie (8.11)) interpreteren! Dan is

$$(Ax,x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \ldots \lambda_n \xi_n^2,$$

waarin $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A zijn. N.B., de coördinaten ξ_i zijn genomen t.o.v. een basis van eigenvectoren van A. Positief definiet zijn van A betekent

$$(Ax,x) > 0 \text{ voor alle } x \neq o,$$

oftewel

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \ldots + \lambda_n \xi_n^2 > 0 \text{ voor alle } (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq o.$$

Dit is precies dan het geval, als alle eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positief zijn. Daarmee is bewezen:

Gevolg. Een symmetrische matrix is positief definiet dan en slechts dan als al z'n eigenwaarden positief zijn.

(11.16) Ten slotte bekijken we nu orthogonale transformaties. In stelling (9.8), (iv) en (v) hebben we hiervoor een eenvoudige gedaante afgeleid. We laten nu zien, hoe men die ook kan vinden in het kader van de eigenwaarde-theorie.

R is verder een reële ruimte met inproduct, $R_{\mathbb{C}}$ z'n complexificatie, waarin we het inproduct voortgezet hebben als in (11.14). A is een orthogonale transformatie $R \to R$, die we lineair voortzetten tot $R_{\mathbb{C}}$.

LEMMA. Is de deelruimte L van R invariant onder de orthogonale transformatie A, d.w.z. $AL = L$, dan is ook $L^{\perp}$ invariant: $AL^{\perp} = L^{\perp}$.

Bewijs. Wegens $AL = L$ is ook $A^{-1}L = L$. Voor $x \in L$ en $y \in L^{\perp}$ is, wegens de orthogonaliteit van A en dus ook van A^{-1},

$$(x,Ay) = (A^{-1}x,A^{-1}Ay)$$
$$= (A^{-1}x,y) = 0,$$

daar $A^{-1}x \in L$. Dus $Ay \in L^{\perp}$.

STELLING. Zij A een orthogonale transformatie in een reële ruimte R met inproduct. Dan geldt:

(i) Is λ een eigenwaarde van A, dan is $|\lambda| = 1$.

(ii) Is λ een niet-reële eigenwaarde van A (in $R_{\mathbb{C}}$), dan is ook $\overline{\lambda}$ een eigenwaarde. Bij deze twee eigenwaarden is er een 2-dimensionale deelruimte L van R zodat $AL = L$ en A op L een draaiing induceert, die t.o.v. een orthonormale basis de matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

heeft, waarbij de hoek ϕ zo is dat $\lambda = e^{i\phi}$.

Bewijs. (i) Is λ eigenwaarde van A in $R_{\mathbb{C}}$ met eigenvector x, dan

volgt uit $Ax = \lambda x$ weer $A\overline{x} = \overline{\lambda}\,\overline{x}$. Dan is dus

$$(x,\overline{x}) = (Ax,A\overline{x}) = (\lambda x,\overline{\lambda}\,\overline{x}) = \lambda\overline{\lambda}(x,\overline{x}).$$

Omdat $(x,\overline{x}) \neq 0$ wegens $x \neq 0$ moet $\lambda\overline{\lambda} = 1$ zijn.

(ii) Als λ een niet-reële eigenwaarde is, dan is $\lambda = e^{i\phi}$ omdat $|\lambda| = 1$, met $\phi \not\equiv 0 \bmod \pi$. Zij $x = y+iz \neq o$, met y en $z \in R$, de eigenvector van A in $R_{\mathbb{C}}$ bij λ. De eigenvector bij $\overline{\lambda}$ is dan $\overline{x} = y-iz$. Uit

$$A(y+iz) = e^{i\phi}(y+iz)$$

$$A(y-iz) = e^{-i\phi}(y-iz)$$

volgt:

$$Ay = \cos\phi.y - \sin\phi.z$$

$$Az = \sin\phi.y + \cos\phi.z.$$

Nu is

$$(x,x) = (Ax,Ax) = (\lambda x,\lambda x) = \lambda^2(x,x).$$

Omdat $\lambda^2 \neq 1$ is, moet $(x,x) = 0$. Dus

$$(y+iz,y+iz) = 0$$

$$(y,y) - (z,z) + 2i(y,z) = 0.$$

Daar y en z reële vectoren zijn, zijn (y,y), (z,z) en (y,z) reëel. Dus

$$(y,y) = (z,z) \text{ en } (y,z) = 0.$$

$e_1 = |y|^{-1}y$ en $e_2 = -|z|^{-1}z$ vormen dus een orthonormale basis van L, en de matrix van A t.o.v. deze basis heeft de aangekondigde vorm.

(11.17) Uit de resultaten van (11.16) kunnen we de eenvoudige gedaante van A, zoals in stelling (9.8), (iv) en (v) beschreven, weer makkelijk afleiden. Heeft A een niet-reële eigenwaarde $\lambda = e^{i\phi}$, dan vinden we een 2-dimensionale invariante deelruimte L,

met daarin een orthonormale basis e_1, e_2, zodat $A|L$ de gedaante $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ heeft. Omdat $AL^\perp \subseteq L^\perp$, kunnen we in $L^\perp$ verder werken. Zijn na een aantal stappen de niet-reële eigenwaarden uitgeput, dan kunnen er nog eigenwaarden 1 en -1 zijn. Hebben we twee eigenwaarden -1, dan kunnen we de matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ schrijven in de gedaante $\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$. Aldus komen we, op een geschikte orthonormale basis, tot de matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & & & & & \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \cos\phi_s & -\sin\phi_s & & \\ & & & \sin\phi_s & \cos\phi_s & & \\ & 0 & & & & \varepsilon & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

($0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}\dim R$, $\varepsilon = \pm 1$). De draaiingshoeken ϕ_j zijn hierin bepaald door het feit dat $e^{i\phi_j}$ en $e^{-i\phi_j}$ eigenwaarden van A zijn (voor $\phi_j = \pi$ betekent dit: -1 komt 2× voor als eigenwaarde). Ze hangen dus inderdaad alleen van A af, en niet van de gekozen orthonormale basis, zoals we reeds na het bewijs van stelling (9.8) opgemerkt hebben.

We merken tenslotte nog op dat we een reële orthogonale transformatie complex op diagonaalgedaante kunnen brengen. Men leidt dit zonder moeite af uit de reële eenvoudige vorm, die we boven gegeven hebben; ga na!

1. Ga in $\mathbb{E}^2$ in een tekening na dat voor vectoren a,b,c de volgende eigenschappen gelden:
   i) $a+b = b+a$
   ii) $(a+b)+c = a+(b+c)$
   iii) $a+o = a$

   Construeer in een tekening voor een vector a de vector -a.
   Ga na dat $a+(-a) = o$.
   Laten λ,μ reële getallen zijn.
   Ga in een tekening na dat $\lambda(a+b) = \lambda a+\lambda b$ en $(\lambda+\mu)a = \lambda a+\mu a$.

2. Ook in $\mathbb{E}^3$ worden vectoren volgens de parallelogramregel opgeteld. Ga in een tekening na dat voor vectoren a,b,c geldt $(a+b)+c = a+(b+c)$

   Voorzie $\mathbb{E}^2$ en $\mathbb{E}^3$ van een coördinatenstelsel.

3. Bereken in $\mathbb{E}^2$ $2a-3b$, waarbij $a = (-1,2)$ en $b = (-2,3)$;
   bereken in $\mathbb{E}^3$ $-5a+b$, waarbij $a = (1,2,3)$ en $b = (6,11,16)$

4. Zoals bekend stelt in $\mathbb{E}^2$ de vergelijking $\alpha_2X-\alpha_1Y = \beta$ een lijn voor (mits α_1 en α_2 niet beide 0 zijn), zeg L.
   Anders gezegd $L = \{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{E}^2 \mid \alpha_2\xi_1-\alpha_1\xi_2 = \beta\}$.
   Stel $\alpha_2 \neq 0$. Bewijs dan dat $L = \{(\frac{\beta}{\alpha_2},0)+\lambda(\alpha_1,\alpha_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   Als $\alpha_1 \neq 0$ kan men analoog bewijzen dat
   $L = \{(0,-\frac{\beta}{\alpha_1})+\lambda(\alpha_1,\alpha_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   We kunnen een lijn L dus steeds schrijven in de vorm
   $L = \{p+\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, voor zekere $p,a \in \mathbb{E}^2$. Een dergelijke schrijfwijze heet een <u>parametervoorstelling</u> van de lijn L.

5. Bepaal parametervoorstellingen van de lijnen in $\mathbb{E}^2$ die door de volgende vergelijkingen gegeven worden
   i) $X+Y = 0$
   ii) $2X+3Y = 8$
   iii) $-3X+7Y = 5$
   iv) $X = 7$
   v) $Y = 0$

Jnl. 1, 4, 16, 19 en 20

6. Laten $a,b \in \mathbb{E}^2$, $a \neq b$.
Zet $L = \{a+\lambda(b-a) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Bewijs: $a,b \in L$.
Op deze wijze krijgen we dus een parametervoorstelling van de lijn door a en b (precies één lijn daar $a \neq b$).
Bewijs: $L = \{b+\lambda(b-a) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\mu a+\nu b \mid \mu,\nu \in \mathbb{R}, \mu+\nu=1\}$

7. Misschien hebt u in de opgaven 4,5 en 6 reeds ontdekt dat de parametervoorstelling van een lijn L niet uniek is. We gaan dit nu nader onderzoeken.
Laat zien: $\{p+\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en $\{q+\mu b \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ zijn parametervoorstellingen van dezelfde lijn dan en slechts dan als $q = p+\lambda_0 a$ en $b = \lambda_1 a$ voor zekere vaste reële getallen λ_0 en λ_1.
(Aanwijzing: q en q+b moeten elementen zijn van $\{p+\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$).

8. Laat $p,a \in \mathbb{E}^3$, $a \neq o$. Analoog aan $\mathbb{E}^2$ stelt de verzameling $L = \{p+\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ een lijn voor, en we zeggen weer dat we L op deze manier in parametervoorstelling gegeven hebben. Ook analoog aan $\mathbb{E}^2$ ziet men in dat voor $a,b \in \mathbb{E}^3$, $a \neq b$, de lijn L door a en b in parametervoorstelling gegeven wordt door
$L = \{a+\lambda(b-a) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{b+\lambda(b-a) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Bepaal een parametervoorstelling van de volgende lijnen:
i) L door de punten (1,0,0) en (1,1,1)
ii) M door de punten (5,1,7) en (-1,4,-3).
iii) N door de punten (5,1,7) en (4,2,5).

9. Bepaal welke van de volgende drietallen punten in $\mathbb{E}^3$ op één lijn liggen, en als dit het geval is, bepaal dan die lijn.
i) (2,2,-1), (-3,1,1) en (4,1,5)
ii) (2,3,5), (-1,1,-1) en $(0,1\frac{2}{3},1)$
iii) $(1,\sqrt{2},2)$, $(3,\sqrt{2}-2,3)$ en $(2,-2,1)$.
iv) (0,1,2), (1,3,5) en (4,7,10)

10. Ga na of de volgende (in parametervoorstelling gegeven) paren lijnen in $\mathbb{E}^2$ elkaar snijden, en zo ja, bepaal dan het snijpunt
i) $L_1 = \{(2,1)+\lambda(1,1)\} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en $M_1 = \{(3,0)+\lambda(1,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

ii) $L_2 = \{(2,4)+\lambda(2,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en $M_2 = \{(5,-1)+\lambda(-4,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

iii) $L_3 = \{(1,0)+\lambda(-1,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en $M_3 = \{(1,2)+\lambda(-2,4) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Doe hetzelfde voor de volgende lijnen in $\mathbb{E}^3$:

iv) $L_4 = \{(1,2,3)+\lambda(1,2,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en $M_4 = \{(0,4,2)+\lambda(-1,2,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

v) $L_5 = \{(-1,3,0)+\lambda(-6,2,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en $M_5 = \{(3,-1,-5)+\lambda(2,2,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

vi) $L_6 = \{(1,0,0)+\lambda(1,-1,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en $M_6 = \{(3,-2,4)+\lambda(-2,2,-4) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

vii) $L_7 = \{(0,1,0)+\lambda(-1,-1,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en $M_7 = \{(0,0,1)+\lambda(2,1,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

11. In $\mathbb{E}^2$ heten $a_1,\ldots,a_n$ $(n \geqslant 1)$ lineair afhankelijk als er $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ zijn, niet alle 0, zó dat $\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_n a_n = o$ (merk op dat voor $n=2$ hier de definitie uit het diktaat staat). Definieer analoog in $\mathbb{E}^3$: $a_1,\ldots,a_n$ $(n \geqslant 1)$ heten lineair afhankelijk als er $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ zijn, niet alle 0, zó dat $\lambda_1 a_1+\ldots\lambda_n a_n = o$. Volgt uit $\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_n a_n = o$ dat $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, dan heten $a_1,\ldots,a_n$ lineair onafhankelijk.
Ga na of de volgende stellen vectoren uit $\mathbb{E}^2$ lineair afhankelijk, dan wel onafhankelijk zijn:

i) (1,2) en (2,1) ii) (3,-1) en (13,-11) iii) (6,4) en (9,6)

iv) (1,-3), (2,5), (-9,7)

Doe hetzelfde voor de volgende stellen in $\mathbb{E}^3$:

v) (1,0,0), (0,1,0) en (0,0,1) vi) (3,2,1), (6,5,3) en (1,1,1)

vii) (1,1,2), (-1,0,1) en (5,2,1) viii)(3,-7,1), (-7,-3,7) en (5,-2,-3)

ix) (2,-1,3) en (3,-1,2) x) (1,-1,1), (1,0,0), (0,1,1) en (-2,-1,1)

12. i) Bewijs: drie punten a,b,c liggen op één lijn dan en slechts dan als b-a en c-a lineair afhankelijk zijn.
(Aanwijzing: bepaal parametervoorstelling van de lijnen door a en b en door a en c en pas opgave 7 toe)

ii) Maak m.b.v. i) nog eens opgave 9.

13. i) Bewijs: de lijnen $\{p+\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en $\{q+\mu b \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ hebben een snijpunt dan en slechts dan als p-q een lineaire combinatie is van a en b (samenvallende lijnen hebben een snijpunt)

ii) Maak m.b.v. i) nog eens opgave 10.

14. Laten a,b en c lineair afhankelijk zijn.

Laat zien: als b en c lineair onafhankelijk zijn dan is a een lineaire combinatie van b en c.

15. Bereken in de volgende gevallen voor $a,b \in \mathbb{E}^2$: $(a,b), |a|, |b|, |a+b|$, de cosinus van de hoek tussen a en b; controleer m.b.v. een tekening de gevonden uitkomsten.
   i) $a = (1,2)$ en $b = (2,1)$
   ii) $a = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ en $b = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$
   iii) $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $b = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$
   iv) $a = (1,1)$ en $b = (0,-1)$
   v) $a = (6,-4)$ en $b = (9,-6)$

16. We willen nu uitrekenen de projectie van een punt $b \in \mathbb{E}^2$ op de lijn $L = \{p+\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $a \neq o$.
   i) Ga m.b.v. een tekening na dat de cosinus van de hoek ϕ tussen de snijdende lijnen L en $M = \{p'+\lambda a' \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $a' \neq o$, gegeven wordt door $\cos \phi = \frac{(a,a')}{|a||a'|}$
   Dus: $L \perp M \iff (a,a') = 0$.
   ii) Neem nu een punt $s = p+\lambda a$ (voor zekere λ) op L, en bekijk de lijn M door s en b, dus $M = \{b+\mu (b-s) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$
   Bepaal nu s zó dat $L \perp M$
   (antwoord: $s = p+\frac{(b-p,a)}{(a,a)} a$)

17. Bereken de projectie van punt $b \in \mathbb{E}^2$ op de lijn $L \subset \mathbb{E}^2$ in de volgende gevallen:
   i) $b = (-3,0)$ en $L = \{(2,5)+\lambda(1,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   ii) $b = (3,-2)$ en $L = \{(1,0)+\lambda(1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   iii) $b = (5,4)$ en $L = \{(-1,2)+\lambda(3,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   iv) $b = (14,6)$ en L wordt gegeven door de vergelijking $7X+3Y = 0$.

18. In opgaven 4 en 5 hebt u vergelijkingen voor lijnen in $\mathbb{E}^2$ omgezet in parameter-vorm. Geef nu vergelijkingen voor de volgende lijnen in $\mathbb{E}^2$:
   i) $\{\lambda(0,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   ii) $\{\lambda(2,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   iii) $\{(1,0)+\lambda(2,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   iv) $\{(0,7)+\lambda(1,0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

v) $\{(1,-1)+\lambda(2,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

vi) $\{(0,1)+\lambda(1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

vii) $\{(\frac{1}{4},\frac{1}{4})+\lambda(1,-1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

viii) $\{(\frac{1}{5},\frac{1}{3})+\lambda(3,-5) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

19. Twee lijnen L en M in $\mathbb{E}^2$ (resp. $\mathbb{E}^3$) heten evenwijdig als ze door verschuiving in elkaar worden overgevoerd, dus als er een $c \in \mathbb{E}^2$ (resp. $c \in \mathbb{E}^3$) is zó dat voor de afbeelding $T_c: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ (resp. $T_c: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$), gegeven door $T_c\, x = x+c$, geldt $T_c(L) = M$.
    i) Gebruik nu opgave 7 om aan te tonen: de lijnen $\{p+\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en $\{q+\mu b \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ zijn evenwijdig dan en slechts dan als a en b lineair afhankelijk zijn.
    ii) In bovenstaande definitie van evenwijdigheid kunnen evenwijdige lijnen ook samenvallen. Welke eis moeten we aan c opleggen opdat L en M niet samenvallen ?

20. Uit de opgaven 5 en 18 blijkt dat in $\mathbb{E}^2$ een lijn zowel gegeven kan worden door een parametervoorstelling, als ook door een vergelijking. We willen het verband tussen beide voorstellingen hier onderzoeken.
    De vergelijking $\alpha_1 X+\alpha_2 Y = \gamma$ kunnen we ook schrijven in de vorm $(a,x) = \gamma$ als we zetten $a = (\alpha_1,\alpha_2)$ en $x = (X,Y)$.
    Toon nu aan: de vergelijking $(a,x) = \gamma$ en de parametervoorstelling $\{p+\lambda b \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ bepalen dezelfde lijn in $\mathbb{E}^2$ dan en slechts dan als $(a,p) = \gamma$ en $(a,b) = 0$.
    Maak met behulp van deze wetenschap nu nog eens opgaven 5 en 18.

1. Bewijs voor een lineaire ruimte R over k uit de axioma's:
   (i) $\lambda(x-y) = \lambda x-\lambda y$ voor alle $x,y \in R$ en voor alle $\lambda \in k$,
   (ii) $(\lambda-\mu)x = \lambda x-\mu x$ voor alle $x \in R$ en voor alle $\lambda,\mu \in k$.

2. Verifieer de axioma's 3, 8, 9 en 10 voor de lineaire ruimte k^n ($n \in \mathbb{N}$).

3. Ga na welke van de volgende deelverzamelingen van k^2 lineaire deelruimten zijn:
   (i) $\{(\xi_1,\xi_2) \in k^2 \mid \xi_2 = 0\}$
   (ii) $\{(\xi_1,\xi_2) \in k^2 \mid \xi_1 = 1\}$
   (iii) $\{(\xi_1,\xi_2) \in k^2 \mid \xi_1^2 = \xi_2^2\}$
   (iv) $\{(\xi_1,\xi_2) \in k^2 \mid \xi_1 = \xi_2\}$.
   (Maak een tekening voor $k = \mathbb{R}$).

4. Welke van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ zijn lineaire deelruimten
   (i) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 = \xi_2+\xi_3\}$
   (ii) $(1,1,1) + <(1,1,2)> = \{(1+\lambda,2+\lambda,1+2\lambda) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   (iii) $(1,1,1) + <(2,2,2)>$
   (iv) $\mathbb{R}^3 \setminus <(1,0,0)>$
   (v) $<(1,1,-1)> + <(1,-1,1)> = \{(\lambda+\mu,\lambda-\mu,-\lambda+\mu) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$.
   (vi) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 = -1\} \cup \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 = 0\}$
   (vii) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1+\xi_2-\xi_3 = \xi_1+2\xi_2+3\xi_3 = 0\}$
   (viii) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1+\xi_2 = \xi_3\} \cap \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1+\xi_2 = 2\}$.

5. Welke van de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{C}^3$ zijn lineaire deelruimten
   (i) $(9,-8,5i)+\mathbb{C}^3 = \{(9,-8,5i) + (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mid \xi_1,\xi_2,\xi_3 \in \mathbb{C}\}$.
   (ii) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \xi_1^2+\xi_2^2 = 0\}$.
   (iii) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 = 0\} \cap \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \xi_1 = \xi_2\} \cap \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \xi_2 \neq i\xi_3\sqrt{2}\}$.
   (iv) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \xi_1 \neq \xi_2+\xi_3\}$.

6. Bewijs dat $\mathbb{R}^2$ oneindig veel lineaire deelruimten heeft.

7. (i) Stel $S = <(0,1,0)> + <(0,0,1)>$ en $T = <(3,1,2)> + <(2,1,-1)>$ in $\mathbb{R}^3$.
Bepaal $S \cap T$ en $S + T$.
Bepaal verder in $\mathbb{R}^3$:

(ii) $(<(1,1,0)> + <(0,0,1)>) \cap (<(1,2,3)>)$.

(iii) $(<(1,1,1)> + <(0,0,7)>) \cap (<(1,2,3)> + <(2,1,3)>)$.

(iv) $(<(1,9,-5) + <(4,-1,7)>) \cap (<(1,0,1)> + <(2,19,2)>)$.

(v) $(<(3,5,8)> + <(9,-3,2)> + <(-9,16,20)>) \cap$
$(<(3,5,8)> + <(0,0,1)>)$.

(vi) $(<(3,5,8)> + ((8,-3,1)> + <(-9,16,20)>) \cap$
$(<(0,0,1)> + <(3,5,7)>)$.

8. Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt:

(i) $(1,\alpha,\alpha) \in (<(2,2,4)> + <(1,1,1)>)$.

(ii) $(1,3,\alpha) \in (<(1,1,2)> + <(2,1,2)>)$.

(iii) $(2\alpha,\alpha,-9) \in (<(7,-1,0)> + <(1,0,-1)>)$.

(iv) $(\alpha,2\alpha,-2\alpha) \in (<(2,0,1)> + <(0,1,1)>)$.

(v) $(1,\alpha,\alpha) \in (<(4,4,8)> + <(3,3,3)>) \cap (<(8,1,1)> +$
$+ <(5,0,0)>)$.

(vi) $(1,-3,\alpha) \in \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1+\xi_2+\xi_3 = 0\}$.

9. Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt:

(i) $(\alpha,1,\alpha,1) \in (<(1,1,1,1)> + <(2,1,2,1)>)$.

(ii) $(\alpha,2,\alpha,1) \in (<(2,2,1,1)> + <(1,2,2,1)>)$.

(iii) $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha) \in (<(2,2,2,2)> + <(3,3,3,1)>) \cap (<(2,2,1,1)> +$
$+ <(1,1,2,2)>)$.

(iv) $(\alpha,3,3,-\alpha) \in (<(1,0,0,-1)> + <(0,1,1,0)>) \cap$
$\cap (<(0,0,1,3)> + <(3,3,2,0)>)$.

(v) $(\alpha,2\alpha,3\alpha,4) \in \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 4\xi_1+3\xi_2+2\xi_1-4\xi_4 =$
$= \xi_1+2\xi_2+\xi_3-2\xi_4 = 0\}$.

10. In $\mathbb{R}^3$ liggen de rechten $L = \{(0,1,1) + \lambda(2,1,2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ en $M = \{(-1,-3,-1) + \mu(3,2,-1) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$. Bepaal $x \in L$ en $y \in M$ zodat x en y afhankelijk zijn; interpreteer dit meetkundig.

11. (i) Laat I een indexverzameling en $(S_i)_{i\in I}$ een stel lineaire deelruimten van een lineaire ruimte R zijn. Bewijs dat $\sum_{i\in I} S_i$ een lineaire deelruimte is, en wel de kleinste die alle S_i ($i \in I$) omvat.

(ii) Bewijs voor twee lineaire deelruimten S_1 en S_2 van een lineaire ruimte R: $S_1 \cup S_2 = S_1 + S_2 \Leftrightarrow S_1 \subseteq S_2$ of $S_2 \subseteq S_1 \Leftrightarrow S_1 \cup S_2$ is een lineaire deelruimte van R.

(iii) Laat zien dat voor twee lineaire deelruimten $S_1 \subseteq S_2$ van een lineaire ruimte R, $S_2 \setminus S_1$ nooit een lineaire deelruimte van R is.

12. Bewijs voor lineaire deelruimten S_1, S_2, S_3 van een lineaire ruimte

(i) $S_1 + S_2 = S_2 + S_1$

(ii) $(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3)$

(iii) $S_1 \cap (S_2 + S_3) \supseteq (S_1 \cap S_2) + (S_1 \cap S_3)$

(iv) $S_1 + (S_2 \cap S_3) \subseteq (S_1 + S_2) \cap (S_1 + S_3)$

(v) In (iii) en (iv) kunnen echte inclusies optreden (Geef voorbeelden hiervan).

13. De verzameling veeltermen in de onbekende X met coëfficiënten uit k noteren we $k[X]$. Dus $k[X] = \{a_0 + a_1 X + \ldots + a_i X^n \mid a_i \in k, n \in \mathbb{N}\}$.
Laat zien dat $k[X]$ met de optelling $(a_0 + a_1 X + \ldots + a_m X^m) + (b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \ldots + (a_i + b_i)X^i + \ldots$ en scalaire vermenigvuldiging $\alpha(a_0 + a_1 X + a_n X^n) = \alpha a_0 + \alpha a_1 X + \ldots + \alpha a_n X^n$ een lineaire ruimte over k vormt.

14. We definiëren de graad van een veelterm in $k[X]$ op de volgende wijze: graad (0) = -1 en graad $(a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n) = n$ voor $a_0, a_1, \ldots, a_n \in k$, $a_n \neq 0$ ($n \geqslant 0$).
Ga na of de volgende deelverzamelingen van $k[X]$ lineaire deelruimten vormen:

(i) $\{p(X) \in k[X] \mid \text{graad } (p(X)) = 3\}$

(ii) $\{p(X) \in k[X] \mid \text{graad } (p(X)) \leqslant 3\}$

(iii) $\{p(X) \in k[X] \mid p(X) = p(-X)$ (d.w.z. $p(X)$ is even)$\}$

(iv) $\{p(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in k\}$

(v) $\{p(X) \in k[X] \mid p(0) = p(1) = 0\}$

(vi) $\{p(X) \in k[X] \mid p(0) = 1\}$

(vii) $\{p(X) \in k[X] \mid p(2) = 0$ en graad $(p(X)) \leqslant 4\}$

(viii) $\{p(X) \in k[X] \mid p(2) = 0$ of graad $(p(X)) \leqslant 4\}$

15. Noem $V = \{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}\}$; dus $V = \mathbb{R}^2$ als verzameling. Definieer de optelling zoals gewoonlijk: $(\xi_1, \xi_2) + (\eta_1, \eta_2) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2)$ voor $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$.

(i) Wordt V een reële lineaire ruimte door de scalaire vermenigvuldiging $\lambda.(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \lambda\xi_2)$ voor $\xi_1, \xi_2, \lambda \in \mathbb{R}$?

(ii) Wordt V een reële lineaire ruimte door de scalaire vermenigvuldiging $\lambda(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2)$ voor $\xi_1, \xi_2, \lambda \in \mathbb{R}$?

(iii) Toon aan dat V met de door $\lambda(\xi_1, \xi_2) = (\lambda\xi_1, 0)$ voor $\xi_1, \xi_2, \lambda \in \mathbb{R}$ gedefinieerde scalaire vermenigvuldiging voldoet aan axioma's 1 t/m 9 maar niet aan axioma 10 voor lineaire ruimten (zie dictaat 2.1).

16. (i) Axioma 10 in (2.1) van het dictaat, voor een lineaire ruimte R over k is te vervangen door: Voor $\lambda \in k$, $x \in R$: $\lambda x = o \Rightarrow \lambda = 0$ of $x = 0$. Bewijs dit.

(ii) Bewijs dat de axioma's 4 en 5 in (2.1) van het dictaat te vervangen zijn door de eisen:
4': er is een element $x \in R$; en
5': de vergelijking $(?x)a+x = b$ heeft precies één oplossing in R voor elk paar elementen $a,b \in R$.

17. Bepaal alle lineaire deelruimten van elk van de volgende lineaire ruimten:
(i) $\mathbb{R}$, (ii) $\mathbb{R}^2$, (iii) $\mathbb{R}^3$, (iv) $\mathbb{C}$.

18. Geef in $\mathbb{R}^2$ voor een willekeurige lineaire deelruimte S $(o \neq S \subset \mathbb{R}^2)$ twee verschillende lineaire deelruimten T en U zodat $S \oplus T = S \oplus U = \mathbb{R}^2$.

19. Onderzoek of de volgende stellen vectoren lineair afhankelijk zijn of niet, zoek een maximaal stel onafhankelijke vectoren en druk de andere in lineaire combinaties daarvan uit:

(i) $(3,7), (8,1), (-4,5)$ in $\mathbb{R}^2$

(ii) $(1,-\frac{1}{2}), (2\frac{1}{2},1), (-1,\pi)$ in $\mathbb{R}^2$

(iii) $(1,1-i), (1+i,1)$ in $\mathbb{C}^2$

(iv) $(2,1-i), (1+i,1)$ in $\mathbb{C}^2$

(v) $(0,1,1), (-1,0,1), (-1,-1,0)$ in $\mathbb{R}^3$

(vi) $(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$ in $\mathbb{R}^3$

(vii) $(1,2,1), (1,-3,-4), (1,0,-1), (1,-2,-3)$ in $\mathbb{R}^3$

(viii) $(0,0,0), (1,-2,3), (-\frac{1}{2},1,-1\frac{1}{2}), (4\frac{2}{3},-9\frac{1}{3},14)$ in $\mathbb{R}^3$

(ix) $(1,2,-1,3), (4,-7,-9,7), (-1,1,2,-2)$ in $\mathbb{R}^4$

(x) $(3,1,2,3,5), (1,6,2,0,3), (4,0,5,0,7), (0,0,0,0,1)$ in $\mathbb{R}^5$

(xi) $(1,2,0,3,1), (0,1,2,3,1), (0,1,2,1,1), (-1,-1,2,2,2)$ in $\mathbb{R}^5$

20. Gegeven zijn lineair onafhankelijke vectoren a,b,c,d in een lineaire ruimte. Ga na welke van de volgende stelsels onafhankelijk zijn.

(i) a-b, a+b, a+c-d, b+c+d

(ii) a+2b+3d, 92c+a, c+81d, d

(iii) a+2b+d, b+c, -a-b-c, a+2b+c+2d

(iv) a+2b+d, 2b+c+d, -a-2b-c-d, 8a+4b-c+2d

21. Bepaal voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ de volgende stellen vectoren in $\mathbb{R}^3$ afhankelijk zijn.

(i) $(4,3,\alpha), (2,3,4), (5,6,7)$

(ii) $(\alpha,1,0), (\alpha,2,3), (2\alpha,1,1)$

(iii) $(4,\alpha,\alpha), (2,3,5), (2,5,3)$

(iv) $(2,\alpha,1), (1,1,\alpha), (\alpha,2,1)$

(v) $(2\alpha,3,9), (-\alpha,2,-1), (\alpha,0,3)$

(vi) $(\alpha^2,\alpha,1), (1,1,1), (4,2,1)$

22. Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ zijn de volgende stellen vectoren in $\mathbb{R}^4$ afhankelijk.

(i) $(\alpha,0,0,1), (1,\alpha,0,1), (1,1,\alpha,1+\alpha), (1,1,-1,0)$

(ii) $(\alpha,0,0,0), (2,1,1,\alpha), (2,1,\alpha,1), (2,\alpha,1,1)$

(iii) $(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$, $(1,2,3,4)$, $(1,7,6,5)$, $(1,5,2,-1)$
(iv) $(0,2,\alpha,-1)$, $(0,2,4+\alpha,-2)$, $(0,1-\alpha,1,0)$, $(1,2,3-\alpha,1)$

23. Ga bij elk van de volgende viertallen vectoren in $\mathbb{R}^3$ na welke vector afhankelijk van de andere drie is.
(i) $(1,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$
(ii) $(6,-3,-2)$, $(-3,6,5)$, $(-2,-5,14)$, $(3,5,6)$
(iii) $(1,-2,1)$, $(1,1,-2)$, $(-1,2,3)$, $(2,1,1)$
(iv) $(1,6,1)$, $(3,13,2)$, $(-1,4,1)$, $(4,9,1)$
(v) $(2,1,1)$, $(3,2,2)$, $(2,1,3)$, $(6,3,4)$

24. R is een lineaire ruimte over k en $a_1,\ldots,a_m$ een lineair onafhankelijk stel vectoren in R. Bewijs:
(i) $a_1,\ldots,a_l$ zijn lineair onafhankelijk voor elke l, $1 \leq l \leq m$.
(ii) $b_1,\ldots,b_n$ een lineair onafhankelijk stel vectoren zodat
$(< a_1 > + \ldots + < a_m >) \cap (< b_1 > + \ldots + < b_n >) = o$ ⇒
$\Rightarrow a_1,\ldots,a_m,b_1,b_2,\ldots,b_n$ lineair onafhankelijk.

25. Bewijs m.b.v. opgave 24 (ii) de onafhankelijkheid van de volgende viertallen vectoren in $\mathbb{R}^4$.
(i) $(1,1,0,1)$, $(1,2,0,1)$, $(1,1,0,-1)$, $(1,0,1,-1)$
(ii) $(5,3,3,5)$, $(3,5,5,3)$, $(5,3,5,3)$, $(3,3,5,5)$
(iii) $(1,3,0,-1)$, $(0,1,0,0)$, $(1,0,-1,1)$, $(0,0,0,1)$
(iv) $(2,2,2,2)$, $(3,1,1,3)$, $(2,-9,-9,1)$, $(-3,-3,5,-3)$

26. Onderzoek voor elk van de volgende stellen veeltermen uit $k[X]$ (opgevat als lineaire ruimte zoals in opgave 13), of ze al of niet afhankelijk zijn, bepaal een maximaal stel onafhankelijke veeltermen en druk de overige in lineaire combinaties daarvan uit.
(i) $1, X, X^2, 1+X^3$
(ii) $1-X, X-X^2, 1-X^2, X-X^3$
(iii) X^2+2X+1, X^2-1, X^2+X
(iv) $X^3+3X^2+3X+1, X^3+1, X^2+1, X+1$

27. Geef twee verschillende bases aan voor elk van de volgende lineaire ruimten:

(i) $\mathbb{R}^2$

(ii) $\{(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1 = \xi_2\}$

(iii) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 = 0\}$

(iv) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1+2\xi_2+\xi_3 = 0\}$

(v) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \xi_1+2\xi_2+\xi_3 = \xi_1+\xi_2+\xi_3 = 0\}$

(vi) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \xi_1-\xi_2+\xi_3-\xi_4 = 2\xi_1+\xi_3 = 0\}$

28. Vul de volgende stellen onafhankelijke vectoren met vectoren uit de standaardbasis aan tot een basis voor $\mathbb{R}^4$:

(i) $(1,0,0,1)$

(ii) $(-1,1,-1,1)$, $(1,0,1,0)$

(iii) $(1,2,3,-1)$, $(4,1,2,-3)$, $(5,3,5,-1)$

(iv) $(6,2,1,4)$, $(1,1,2,1)$, $(1,3,9,2)$

(v) $(2,8,7,2)$, $(1,4,3,2)$, $(3,12,5,1)$

29. Bepaal een basis voor ieder der in opgave 8 gegeven lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^3$.

30. Bepaal een basis voor de volgende deelruimten van $\mathbb{R}^4$.

(i) $\langle(1,1,1,-1)\rangle + \langle(10,8,8,3)\rangle + \langle(15,11,11,11)\rangle$

(ii) $(\langle(1,3,5,9)\rangle + \langle(0,1,0,1)\rangle + \langle(7,0,2,3)\rangle) \cap (\langle(8,3,0,-1)\rangle + \langle(14,2,-1,3)\rangle)$

(iii) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4 = 0\} + \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \in \in \mathbb{R}^4 \mid \xi_1+\xi_2+\xi_3 = 0\}$

(iv) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \xi_1+\xi_2 = \xi_3+\xi_4 = 0\} + \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \in \in \mathbb{R}^4 \mid 2\xi_1+2\xi_2+\xi_3+\xi_4 = \xi_1+\xi_2+2\xi_3+2\xi_4 = 0\}$

31. Laat zien dat $1, X, X^2, X^3, \ldots, X^i, \ldots$ een basis van $k[X]$ over k vormen (zie opgave 13). We hebben hier dus te maken met een (aftelbaar) oneindig-dimensionale lineaire ruimte.

32. Geef een basis voor de volgende lineaire deelruimten van $k[X]$.

(i) $\{p(X) \in k[X] \mid \text{graad } (p(X)) \leqslant 3\}$

(ii) $\{p(X) \in k[X] \mid p(4) = 0\}$

(iii) $\{p(X) \in k[X] \mid p(X) = p(-X)\}$

(iv) $\{p(X) \in k[X] \mid p(4) = p(1) = 0 \text{ en graad } (p(X)) \leqslant 4\}$

(v) de som van de deelruimten uit (i) en (iii)
(vi) de doorsnede van de deelruimten uit (iii) en (iv)

33. In $\mathbb{R}^3$ zijn lineaire deelruimten gegeven door de volgende voortbrengers:
(i) $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,1,3)$
(ii) $(\sqrt{2},1,1)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2},\sqrt{3},2)$, $(1,\sqrt{6},\sqrt{2})$
(iii) $(3,1,7)$, $(2,5,9)$, $(9,4,4)$
(iv) $(3,1,7)$, $(2,5,9)$, $(3,4,10)$, $(1,1,3)$
Bepaal in elk van de gevallen een basis voor de deelruimte, en vul die aan tot een basis voor de hele ruimte; schrijf de overtollige voortbrengers als lineaire combinatie van de gekozen basis.

34. Vul de volgende stellen onafhankelijke vectoren aan tot een basis van $\mathbb{R}^5$ met vectoren uit de basis $(1,2,3,4,5)$, $(0,1,2,3,4)$, $(0,0,1,2,3)$, $(0,0,0,1,2)$, $(0,0,0,0,1)$:
(i) $(3,1,2,3,5)$, $(1,6,2,0,3)$, $(4,0,5,0,7)$
(ii) $(1,2,0,3,1)$, $(0,1,2,1,1)$, $(-1,-1,2,2,2)$
(iii) $(1,0,2,7,3)$, $(1,1,8,7,12)$, $(2,1,4,14,6)$

35. Schrijf $(-1,1,1,+1)$ respectievelijk $(1,-3,5,1)$ als lineaire combinatie van elk van de in opgave 25 gegeven bases in $\mathbb{R}^4$.

36. Bepaal de dimensies van de in opgave 33 gegeven lineaire deelruimten. als 33

37. Bepaal de dimensie van doorsnede en som van elk van de volgende paren lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^3$ (maak evt. een schets).
(i) $\langle(1,0,3)\rangle$ en $\langle(1,1,2)\rangle$
(ii) $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 = 0\}$ en $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 7\xi_1+6\xi_2 = 9\xi_3\}$
(iii) $\langle(0,1,1)\rangle$ en $\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 8\xi_1+6\xi_2 = 9\xi_3\}$

38. (i) Laat de eindig-dimensionale lineaire ruimte R directe som zijn van twee lineaire deelruimten S en T. Bewijs dat de vereniging van een basis van S en een basis van T een basis van R vormt. Concludeer dat dim R = dim S + dim T.

(ii) Bewijs dat voor iedere lineaire deelruimte S van een eindigdimensionale lineaire ruimte R geldt dim R $\geqslant$ dim S; en dim S = dim R $\Rightarrow$ S = R.

39.(i) Bewijs: Voor twee lineaire deelruimten S en T van een lineaire ruimte is dim S + dim T = dim (S+T) + dim (S$\cap$T). Aanwijzing: Kies eerst een basis van S $\cap$ T en vul deze aan tot een basis van S resp. een van T.

(ii) Concludeer voor twee lineaire deelruimten S en T van eenzelfde ruimte: dim S + dim T = dim (S+T) $\Leftrightarrow$ S+T is een directe som.

40. Bepaal de dimensie van doorsnede en som van elk van de volgende paren lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^5$.

(i) $(\langle(1,1,1,1,-1)\rangle + \langle(-1,0,0,0)\rangle)$ en $(\langle(0,3,2,5,7)\rangle + \langle(1,2,-6,4,3)\rangle)$

(ii) $(\langle(1,0,1,0,0)\rangle + \langle(1,0,0,1,0)\rangle + \langle(1,0,0,0,1)\rangle)$ en $(\langle(0,1,1,0,0)\rangle + \langle(0,1,0,0,1)\rangle + \langle(0,0,1,0,1)\rangle)$

(iii) $(\langle(4,-3,2,7,8)\rangle + \langle(4,4,2,-8,0)\rangle + \langle(5,5,1,0,1)\rangle)$ en $(\langle(1,0,0,0,7)\rangle + \langle(0,1,0,0,7)\rangle + \langle(0,0,1,0,7)\rangle)$

41. Zij $n \in \mathbb{N}$. Stel $R = \{(\xi_1,\ldots,\xi_{2n}) \mid \xi_1,\ldots,\xi_{2n} \in \mathbb{R}\}$, dus $R = \mathbb{R}^{2n}$ als verzameling.

(i) Bewijs dat R een complexe lineaire ruimte wordt door de gewone optelling en de scalaire vermenigvuldiging $(\alpha+i\beta)(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_{2n}) = (\alpha\xi_1-\beta\xi_2,\alpha\xi_2+\beta\xi_1,\alpha\xi_3-\beta\xi_4,\alpha\xi_4+\beta\xi_3,\ldots,\alpha\xi_{2n-1}-\beta\xi_{2n},\alpha\xi_{2n}+\beta\xi_{2n-1})$ voor $\alpha,\beta,\xi_1,\ldots,\xi_{2n} \in \mathbb{R}$.

(ii) Laat zien dat R met deze optelling en scalaire vermenigvuldiging een n-dimensionale complexe lineaire ruimte is, door een basis aan te geven.
Door $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{2n-1},\xi_{2n})$ met $(\xi_1+i\xi_2,\ldots,\xi_{2n-1}+i\xi_{2n})$ te identificeren (ga de bewerkingen na!), doen we R met $\mathbb{C}^n$ samenvallen.

42. Beschouw de lineaire ruimte S die we krijgen door de vectoren uit $\mathbb{C}^n$ te nemen en de scalairen te beperken tot $\mathbb{R}$. Dus $S = \mathbb{C}^n$ als verzameling, de optelling is als gewoonlijk en de scalaire vermenigvuldiging is door $\alpha(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n)$ voor $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ gedefinieerd.
   (i) Bewijs dat S inderdaad een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ is.
   (ii) Bewijs dat S dimensie 2n over $\mathbb{R}$ heeft, door een basis aan te geven.

43. R is de reële lineaire ruimte van alle functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ (zie 2.16 van het dictaat). Bewijs dat de volgende drie deelverzamelingen van R oneindig-dimensionale lineaire ruimten zijn.
   (i) $\{f \in R \mid f(x) = 0 \text{ voor } x \in W\}$ waar W een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, zodanig dat $\mathbb{R} \setminus W$ een oneindige verzameling is.
   (ii) $\{f \in R \mid f(0) = f(1) = f(2)\}$
   (iii) $\{f \in R \mid f(x) \neq 0 \text{ voor hoogstens eindig veel } x \in \mathbb{R}\}$
   (iv) Laat W_1 en W_2 twee deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn zodat $W_1 \cup W_2 = \mathbb{R}$ en $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.
   Bewijs dat $\{f \in R \mid f(x) = 0 \text{ voor } x \in W_1\} \oplus \{f \in R \mid f(x) = 0 \text{ voor } x \in W_2\} = R$.

1. Gegeven zijn lineaire ruimten U en V over k en een afbeelding $A : U \to V$, die voldoet aan $A(x+\lambda y) = A(x) + \lambda A(y)$ voor alle $\lambda \in k$ en alle $x,y \in U$.
   Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

2. Ga van de volgende afbeeldingen: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na of zij lineair zijn. Bewijs Uw beweringen.
   (i) $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto (\xi_1+\xi_2, \xi_2+\xi_3, \xi_1+\xi_2+\xi_3)$
   (ii) $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto (1+\xi_1, 2+\xi_3, -3-\xi_3)$
   (iii) $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto (\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2)$
   (iv) $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto (5\xi_1+7\xi_2+\xi_3, 0, -3\xi_1+2\xi_2)$
   (v) $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto (e^{\xi_1+\xi_2}, e^{\xi_2+\xi_3}, e^{\xi_1+\xi_3})$

3. Ga van de afbeeldingen van som 2 na of zij injectief, surjectief, bijectief zijn en of er lineaire isomorfismen bij zijn.

4. (i) R en S zijn lineaire ruimten over k met dezelfde (eindige) dimensie. Bewijs dat er een lineair isomorfisme $A : R \to S$ bestaat.
   (ii) In de opgaven van §2 bent U $\mathbb{C}$ tegengekomen als lineaire ruimte over $\mathbb{R}$. Construeer nu een lineair isomorfisme $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$.

5. Laat R, S en T lineaire ruimten over k zijn.
   (i) Bewijs dat R isomorf is met R (notatie: $R \cong R$)
   (ii) Bewijs: als $R \cong S$ dan $S \cong R$.
   (iii) Bewijs: als $R \cong S$ en $S \cong T$, dan $R \cong T$
   Isomorfie is dus een equivalentie relatie.

6. Bij twee lineaire ruimten R en S over k definiëren we de uitwendige directe som door $R \oplus S = \{(x,y) | x \in R, y \in S\}$. Op $R \oplus S$ definiëren we de optelling door $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ voor $x_1,x_2 \in R$, $y_1,y_2 \in S$ en de scalaire vermenigvuldiging door $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ voor $x \in R$, $y \in S$, $\lambda \in k$.
   (i) Bewijs dat $R \oplus S$ zo een lineaire ruimte over k is.
   (ii) Bewijs: $R \cong R \oplus \langle o \rangle = \{(r,o) | r \in R\}$ en $S \cong \langle o \rangle \oplus S$.

(iii) Bewijs: $R \oplus S \cong S \oplus R$

(iv) Als S en R lineaire deelruimten van een lineaire ruimte T zijn, dan is $R \oplus S$ in de zin van het dictaat (zie (2.7)) isomorf met de uitwendige directe som $R \oplus S$. Bewijs dit.

(v) Bewijs: $k^m \oplus k^n \cong k^{m+n}$ $(m,n \in \mathbb{N})$

7. Voor $\lambda \in \mathbb{R}$ is de lineaire afbeelding $A_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven t.o.v. de standaard basisvectoren door de volgende matrix: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Bepaal voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ de dimensie van $A_\lambda(\mathbb{R}^3)$

(ii) Voor welke waarden van λ is er een lineaire afbeelding B_λ zodat $A_\lambda B_\lambda = I_{\mathbb{R}^3}$?

8. Geef de matrices van de volgende lineaire afbeeldingen t.o.v. de standaard basisvectoren in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

(i) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door $A(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (\xi_1+\xi_2, 3\xi_3)$

(ii) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ " " " $B(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (3\xi_3+2\xi_2, \xi_1+\xi_3)$

(iii) $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ " " " $C(\xi_1,\xi_2) = (\xi_2,\xi_1,0)$

(iv) $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ " " " $D(\xi_1,\xi_2) = (0,0,\xi_1+2\xi_2)$

9. Laat $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; bereken A^{2n} voor natuurlijke n.

10. (i) Beschouw de afbeelding $A : k^5 \to k^7$, die gedefinieerd is door $A(\xi_1,\ldots,\xi_5) = (0,\xi_1,0,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5)$. Bewijs dat A lineair is.

(ii) Beschouw de afbeelding $B : k^7 \to k^5$, die gedefinieerd is door $B(\xi_1,\ldots,\xi_7) = (\xi_2,\xi_4,\xi_5,\xi_6,\xi_7)$. Bewijs dat B lineair is.

(iii) Bewijs dat $BA = id_{k^5}$ en ga na of $AB = id_{k^7}$. Bewijs Uw bewering!

(iv) Beschouw de afbeelding $C : k^\infty \to k^\infty$, gedefinieerd door $C(\xi_1,\xi_2,\ldots) = (0,\xi_1,\xi_2,\ldots)$. Is C lineair?

(v) Zelfde vraag voor D die gedefinieerd is door $D(\xi_1,\xi_2,\xi_3\ldots) = (\xi_2,\xi_3,\ldots)$.

(vi) Bewijs dat $DC = id_{k^\infty}$. Is ook $CD = id_{k^\infty}$? Bewijs Uw antwoord.

(vii) Bewijs dat C injectief is maar niet surjectief en dat D surjectief is maar niet injectief.

11. Zij R de reële lineaire ruimte van de continue reële functies op $[a,b]$.

(i) Zij $A : R \to \mathbb{R}$ de afbeelding, die gedefinieerd is door $A(f) = \int_a^b f(x)dx$. Bewijs dat A lineair is.

(ii) Zij $B : R \to \mathbb{R}$ de afbeelding, die gedefinieerd is door $B(f) = \int_a^b |f(x)|dx$. Ga na of B lineair is; bewijs Uw bewering!

(iii) Bepaal alle lineaire deelruimten van R waarop B een lineaire afbeelding induceert (d.w.z. waarop B als lineaire afbeelding werkt).

(iv) De afbeelding $C : R \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door $C(f) = \int_a^b \{x+f(x)\}dx$. Verder is gegeven dat C lineair is. Bereken b als $a = -2\frac{1}{2}$.

12. Zij R de ruimte uit opgave 11.
Definieer een afbeelding $A : R \to R$ door $(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$.

(i) Ga na dat hierdoor inderdaad een afbeelding: $R \to R$ gedefinieerd wordt.

(ii) Bereken $A(f)(a)$.

(iii) Bewijs dat A lineair is.

(iv) Bewijs dat A injectief is.

(v) Is A ook surjectief?

13. Laat m en n natuurlijke getallen zijn en laat $M_{m,n}$ de verzameling van de $m \times n$ matrices met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ zijn.

(i) Toon aan dat $M_{m,n}$ met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging een complexe lineaire ruimte is.

(ii) Bepaal de dimensie van $M_{m,n}$ en geef er een basis van aan.

(iii) Bepaal een isomorfisme: $M_{m,n} \to \mathbb{C}^{m \times n}$.

14. Bereken de volgende matrixproducten:

(i) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$;

Merk op dat voor matrixvermenigvuldiging i.h.a. niet geldt A.B = B.A (matrixvermenigvuldiging is niet commutatief). Geef zelf een voorbeeld van twee 3 × 3 matrices die niet commuteren.

15. Bereken de volgende matrixproducten:

(i) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&10\\8&11\\9&12\end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{3}\\\frac{1}{2}\sqrt{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\sqrt{3}\\-\frac{1}{2}\sqrt{3}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$; (iv) $\begin{pmatrix}10&-9&1\\25&7&4\\-34&5&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$;

(v) $\begin{pmatrix}1&5\\2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&19\\10&8\end{pmatrix}$.

16. Bereken de inverse van $\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.

17. Bepaal de matrices t.o.v. de standaard basisvectoren van de lineaire afbeeldingen: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die gegeven worden door

(i) A(2,1,3) = (4,5,6)
A(0,1,2) = (1,2,0)
A(1,0,1) = (0,2,3)

(ii) A(1,1,0) = (-2,-5,1)
A(1,0,1) = (0,1,-2)
A(0,1,1) = (3,-2,-1)

(iii) A(2,1,0) = (1,0,0)
A(1,3,1) = (0,1,0)
A(5,1,6) = (0,0,2)

(iv) A(2,1,1) = (1,0,0)
A(1,0,1) = (3,4,-2)
A(1,2,0) = (-1,-1,3).

18. Bepaal de matrices van de lineaire afbeeldingen van som 17, nu t.o.v. de basis $\{f_1 = (2,1,1);\ f_2 = (1,0,1);\ f_3 = (1,2,0)\}$.

19. Bepaal de matrices t.o.v. de standaard basisvectoren van de volgende lineaire afbeeldingen: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(i) A(1,2,3) = (1,0)
A(1,1,0) = (0,1)
A(2,1,1) = (2,3)

(ii) A(1,0,1) = (1,2)
A(2,2,2) = (2,4)
A(2,2,0) = $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

(iii) $A(-1,-1,2) = (1,0)$
$A(1,2,1) = (3,4)$
$A(0,1,1) = (1,2)$.

20. Bepaal de matrices van de lineaire afbeeldingen van som 19, nu t.o.v. de bases $\{f_1 = (2,1,1);\ f_2 = (1,0,1);\ f_3 = (1,2,0)\}$ van $\mathbb{R}^3$ en $\{g_1 = (1,2);\ g_2 = (2,1)\}$ van $\mathbb{R}^2$.

21. Bepaal de matrices van de volgende lineaire afbeeldingen: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ t.o.v. de basis $\{f_1, f_2, f_3\}$ als in opgave 20 voor $\mathbb{R}^3$ en de standaard basis voor $\mathbb{R}^4$:

(i) $A(3,1,5) = (1,0,1,0)$
$A(4,2,7) = (2,1,0,0)$
$A(5,7,8) = (0,1,2,3)$

(ii) $A(1,1,1) = (1,0,0,0)$
$A(1,2,1) = (0,1,1,0)$
$A(1,1,2) = (1,1,1,2)$

(iii) $A(2,0,1) = (3,5,7,8)$
$A(2,1,3) = (4,8,9,0)$
$A(1,1,1) = (2,2,2,2)$.

22. De afbeeldingen A_1, A_2, A_3: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ worden t.o.v. de standaard basisvectoren gegeven door resp. de matrices M_1, M_2, M_3 waarbij

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Laat $b_1 = (1,0,0)$; $b_2 = (1,2,3)$ en $b_3 = (0,4,2)$.
Bereken $A_i(b_j)$ $(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$.

23. Ga na of de volgende matrices een inverse hebben en bereken die inverse als hij bestaat. Controleer het resultaat!

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; (iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; (iv) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(v) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$; (vi) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

24. a. Bewijs voor matrices (voor zover zinvol) de volgende rekenregels. Waarom staat er "voor zover zinvol"? Geef duidelijk antwoord!

(i) $(A+B)C = AC + BC$.
(ii) $A(B+C) = AB + AC$.
(iii) $A(BC) = (AB)C$.

b. Is het voor 2×2 matrices A en B altijd waar dat $AB = BA$? Zo ja, geef bewijs; zo nee, geef tegenvoorbeeld.

25. Laat A een $m \times n$ matrix zijn met complexe coëfficiënten.
(i) Vind een matrix B zodat $BA = 2A$.
(ii) Vind een matrix C zodat $AC = 2A$.
(iii) Bewijs: $AC^2 = B^2A$.

26. (i) A is de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
Bepaal alle matrices B en C waarvoor geldt $BA = AC = 2A$.
(ii) Zelfde vraag voor de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

27. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 + 2\xi_2, 2\xi_2, 3\xi_1 + \xi_2)$.
(i) Geef de matrix van A t.o.v. de standaard basisvectoren.
(ii) Geef de matrix van A t.o.v. de basis die gevormd wordt door $f_1 = (1,1,0)$; $f_2 = (1,0,1)$ en $f_3 = (0,1,0)$.

28. Laat A en B 2×2 matrices zijn met coëfficiënten in k.
(i) Bewijs: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
(ii) Bewijs: $\det(BA) = \det(AB)$.
(iii) Bewijs: $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ (voor inverteerbare A).

29. R en S zijn lineaire ruimten over k en $A : R \to S$ is een lineaire afbeelding. Laat $\{e_1, \ldots, e_n\}$ een basis van R zijn en laat $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ een basis van S zijn.
Zij $\{f_1, \ldots, f_n\}$ een andere basis van R.
Bewijs dat $\{Af_1, \ldots, Af_n\}$ een basis van S is.

30. R is een lineaire ruimte over k en A en B zijn lineaire afbeeldingen: $R \to R$.

Bewijs: (i) AB is inverteerbaar $\Leftrightarrow$ A en B zijn inverteerbaar.
(ii) Wat is $(AB)^{-1}$ als AB inverteerbaar is?

31. Laat A een $n \times n$ matrix zijn met coëfficiënten in k die voldoet aan $A^2 = I$; veronderstel dat A+I inverteerbaar is. Bewijs dat A-I niet inverteerbaar is; bereken A.

32. Bereken de determinanten van de volgende matrices:
(i) $\begin{pmatrix} i & 3+4i \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; (ii) $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; (iii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

33. Zij V een lineaire ruimte over k met basis $e_1,\ldots,e_n$.
Zij V* de verzameling van de lineaire afbeeldingen: $V \to k$ (lineaire functionalen). Definieer een optelling en een scalaire vermenigvuldiging in V* door a. $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$.
b. $(\lambda f)(v) = \lambda . f(v)$ voor $\lambda \in k$.
(i) Bewijs dat V* een lineaire ruimte is over k.
(ii) Definieer functies $e_1^*,\ldots,e_n^* : V \to k$ door $e_i^*(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j e_j) = \gamma_i$. Bewijs dat de $e_i^* \in V^*$.
(iii) Bewijs dat $e_1^*,\ldots,e_n^*$ lineair onafhankelijk zijn.
(iv) Bewijs dat $e_1^*,\ldots,e_n^*$ de ruimte V* opspannen. Het stel $\{e_1^*,\ldots,e_n^*\}$ heet de duale basis van V* bij de basis $e_1,\ldots,e_n$ van V.
(v) Bepaal een isomorfisme: $V \to V^*$. Merk op dat dit isomorfisme van de keuze van de basis afhangt! Geef de matrix van Uw isomorfisme t.o.v. de bases $\{e_1,\ldots,e_n\}$ van V en $\{e_1^*,\ldots,e_n^*\}$ van V*.

34. Zij $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de lineaire afbeelding die gegeven wordt door $A(\xi_1,\ldots,\xi_n) = (\xi_1, \xi_1+\xi_2, \xi_2+\xi_2+\xi_3, \ldots, \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)$.
(i) Onderzoek of A een lineair isomorfisme is en bewijs Uw bewering.
(ii) Heeft A een inverse? Zo ja, hoe ziet hij er uit?
(iii) Geef de matrix-voorstelling van A en zo mogelijk van A^{-1}.

35. In deze opgave vindt U een aantal paren van bases van $\mathbb{R}^3$. Bereken in deze gevallen de transformatiematrix die de overgang van de basis E_1 naar de basis E_2 beschrijft.

(i) $E_1 = \{e_1 = (1,1,0);\ e_2 = (1,1,1);\ e_3 = (1,0,1)\}$
$E_2 = \{f_1 = (1,2,3);\ f_2 = (1,1,0);\ f_3 = (2,1,1)\}$.

(ii) $E_1 = \{e_1 = (1,2,3);\ e_2 = (2,1,1);\ e_3 = (1,1,0)\}$
$E_2 = \{f_1 = (0,1,2);\ f_2 = (1,2,1);\ f_3 = (1,2,4)\}$.

(iii) $E_1 = \{e_1 = (1,0,1);\ e_2 = (2,2,2);\ e_3 = (2,2,0)\}$
$E_2 = \{f_1 = (-1,-1,2);\ f_2 = (1,2,1);\ f_3 = (0,1,1)\}$.

36. De lineaire afbeelding: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heeft op $f_1 = (1,3)$ en $f_2 = (0,-2)$ de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ en op e_1, e_2 de matrix $\begin{pmatrix} 1 & -22 \\ -1 & -39 \end{pmatrix}$. Bepaal e_1 en e_2.

37. De lineaire afbeelding $A : R \to R$ heeft op basis $e_1, \ldots, e_n$ de matrix (α_{ij}). Wat is de matrix van A t.o.v. de basis $f_1 = e_2$, $f_2 = e_3, \ldots, f_{n-1} = e_n$, $f_n = e_1$?

38. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door $A(2,1,0) = (3,2,-1)$; $A(2,2,1) = (3,4,1)$ en $A(1,2,0) = (1,4,2)$.

(i) Bereken de transformatiematrix die de basisovergang van $E = \{(2,1,0),(2,2,1),(1,2,0)\}$ naar $F = \{(2,1,0),(0,1,1),(1,2,-1)\}$ beschrijft.

(ii) Bereken de matrix van A op basis van F, met behulp van de transformatiematrix die U in (i) gevonden hebt.

39. De lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt t.o.v. de standaard basisvectoren gegeven door de matrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Bepaal de matrix van A t.o.v. de basis $\left\{\begin{matrix} f_1 = (1,1,0) \\ f_2 = (0,1,1) \\ f_3 = (1,0,1) \end{matrix}\right\}$ van $\mathbb{R}^3$

en de basis $\left\{\begin{matrix} g_1 = (1,1) \\ g_2 = (1,-1) \end{matrix}\right\}$ van $\mathbb{R}^2$.

40. A is de lineaire afbeelding: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeven t.o.v. de standaard basisvectoren door de matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
Bepaal de matrix van A t.o.v. de basis die bestaat uit $f_1 = (1,-1)$ en $f_2 = (3,4)$ met behulp van een transformatiematrix.

41. De lineaire afbeelding A : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wordt t.o.v. de standaard basisvectoren gegeven door de matrix $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 2 & 0 \\ & 0 & \ddots \\ & & & 2 \end{pmatrix}$
Bereken de matrix van A t.o.v. de basis $f_1 = (1,1,0,0,\ldots,0)$; $f_2 = (0,1,1,0,\ldots)$; $f_3 = (0,0,1,1,0,0,\ldots),\ldots f_n = (1,0,\ldots,0,0)$.

42. Bereken de transformatiematrix die de basistransformatie $E_1 \to E_2$ in $\mathbb{R}^4$ beschrijft in de volgende gevallen.
(i) $E_1 = \{e_1 = (1,0,1,0); e_2 = (0,1,1,0); e_3 = (1,0,0,1); e_4 = (0,0,0,1)\}$
$E_2 = \{f_1 = (1,-1,0,0); f_2 = (1,1,0,0); f_3 = (0,0,1,-1); f_4 = (0,0,1,1)\}$.

(ii) $E_1 = \{e_1 = (1,1,1,0); e_2 = (1,-1,-1,0); e_3 = (1,0,0,1); e_4 = (0,1,0,0)\}$
$E_2 = \{f_1 = (2,1,-1,0); f_2 = (-2,1,0,0); f_3 = (0,1,2,3); f_4 = (2,0,0,0)\}$.

43. In $\mathbb{R}^3$ beschouwen wij de bases $E = \{e_1 = (3,1,2);\ e_2 = (1,0,2);\ e_3 = (0,1,0)\}$ en $F = \{f_1 = (1,1,0);\ f_2 = (1,0,1);\ f_3 = (0,1,1)\}$.
De lineaire afbeelding A : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wordt t.o.v. E gegeven door de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.
Bepaal de matrix van A t.o.v. F met behulp van een transformatiematrix.

44. In $\mathbb{R}^3$ beschouwen wij de basis $E = \{e_1 = (1,1,0);\ e_2 = (2,1,0);\ e_3 = (0,0,1)\}$, in $\mathbb{R}^4$ de basis $F = \{(1,1,1,0) = f_1,\ f_2 = (2,2,1,0);\ f_3 = (2,2,0,1);\ f_4 = (0,1,2,0)\}$.
De lineaire afbeelding A : $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door
$A(1,1,0,0) = (1,0,0)$; $A(1,0,1,0) = (0,1,0)$; $A(1,0,0,2) = (0,0,1)$; $A(1,0,0,1) = (2,1,1)$.
Bepaal de matrix van A t.o.v. de bases F van $\mathbb{R}^4$ en E van $\mathbb{R}^3$.

45. (i) Beschouw geval (i) van opgave 42.
Laat $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeven zijn t.o.v. E_1 door de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & -5 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & 3 \\ 4 & -8 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bereken de matrix van A t.o.v. E_2 m.b.v. de resultaten van opgave 42.

(ii) Idem met $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 8 \\ 5 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

46. Zie opgave 45, maar nu geval (ii) van opgave 42.

1. Bepaal de volgende produkten van permutaties:

i) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&3&4\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&1&4\end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&3&4&5&6\end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&1&3&2&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&5&4&6&3\end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&4&1&3&2&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&5&7&4&3&1&6\end{pmatrix}$

vi) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&1&3&2&5&4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&7&4&3&6&5\end{pmatrix}$

2. Als opgave 1. voor:

i) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&6&4&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&4&5&6&7\end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&5&7&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&7&5&6&4\end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&2&3&4&6&7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&4&2&3&5&6&7\end{pmatrix}$

vi) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&6&3&1&4&2&5&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&1&4&5&3&7&6&2\end{pmatrix}$

3. Bepaal de inversen van de volgende permutaties:

i) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&4&3&6&5\end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&4&1&5&3&2&6\end{pmatrix}$

4. Als opgave 3 voor:

i) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&3&7&5&2&1&4&6\end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&2&3&1&7&5&8&6\end{pmatrix}$

iv) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&5&3&6&2&4&7\end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&1&4&3&7&5&6\end{pmatrix}$

5. Twee permutaties π en τ heten disjunct als de elementen die door de een worden veranderd, door de ander worden vastgehouden, en andersom; dus $\pi(i) \neq i \Rightarrow \tau(i) = i$
$\tau(i) \neq i \Rightarrow \pi(i) = i$.
   - i) Geef een voorbeeld van twee disjuncte permutaties.
   - ii) Ga van ieder tweetal te vermenigvuldigen permutaties uit opgave 1 na of het disjunct is.
   - iii) Doe hetzelfde met opgave 2.
   - iv) Bewijs dat voor twee disjuncte permutaties π en τ geldt $\pi\tau = \tau\pi$, en controleer dit met de disjuncte paren uit opgaven 1 en 2.
   - v) Geef een voorbeeld van twee niet disjuncte permutaties π en τ waarvoor toch geldt $\pi\tau = \tau\pi$.

6. Ga na of de volgende permutaties even of oneven zijn door het aantal misplaatsingen te tellen.
   i) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&7&1&6&2&4&3\end{pmatrix}$

   iv) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&6&1&5&2\end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&9&8&2&5&3&7&6&4\end{pmatrix}$

7. i) Schrijf de permutaties uit de vorige opgave als product van buurverwisselingen.
   ii) Bepaal nu m.b.v. de stelling uit (4.3) het signum van deze permutaties.

8. Bewijs voor permutaties π en τ:
   - i) $\pi\tau$ even $\Leftrightarrow$ $\tau\pi$ even.
   - ii) π even en τ even $\Rightarrow$ $\pi\tau$ even.
   - iii) π even en τ oneven $\Rightarrow$ $\pi\tau$ oneven.
   - iv) π oneven en τ oneven $\Rightarrow$ $\pi\tau$ even.
   - v) π^2 is even.
   - vi) π^{2k} is even ($k \in \mathbf{Z}$).

9. i) Zij τ een buurverwisseling. Ga na dat $\tau^2 = id$.
   ii) Zij $\pi = \tau_1 \ldots \tau_k$ geschreven als produkt van buurverwisselingen. Schrijf π^{-1} als produkt van buurverwisselingen.
   iii) Leid uit ii) af: $sg(\pi^{-1}) = sg(\pi)$.
   iv) Leid ook uit $sg(\pi\rho) = sg(\pi)sg(\rho)$ af dat $sg(\pi^{-1}) = sg(\pi)$.

10. We beschouwen permutaties van $\{1,\ldots,n\}$.
   i) Bewijs: $\pi\sigma = \pi \Rightarrow \sigma = 1$ voor permutaties π en σ.
   ii) Bewijs dat er voor elke permutatie π een natuurlijk getal k is zó dat $\pi^k = 1$.

11. Volgens de vorige opgave is er voor elke permutatie π een natuurlijk getal k zó dat $\pi^k = 1$. Dus is er voor elke permutatie π een kleinste natuurlijke getal, noem dit $o(\pi)$ (de <u>orde</u> van π), met $\pi^{o(\pi)} = 1$. Bepaal $o(\pi)$ in de volgende gevallen.
   i) π is een buurverwisseling.
   ii) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   iii) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
   iv) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
   v) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

12. Bewijs: als π en τ disjuncte permutaties zijn dan geldt $o(\pi\tau) = kgv(o(\pi),o(\tau))$.
   Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat dit bij niet-disjuncte permutaties niet altijd het geval is.

13. Bepaal hoeveel <u>even</u> permutaties van 2, 3 en 4 elementen er zijn. Wat vermoedt u op grond van de gevonden aantallen?

14. We generaliseren de vorige opgave. Zij $V = \{1,\ldots,n\}$ $(n \geqslant 2)$ en noem Σ de verzameling van alle permutaties van V.
   i) Zij $\pi \in \Sigma$ en definieer $f_\pi : \Sigma \to \Sigma$ door $f_\pi(\tau) = \pi\tau$, $\tau \in \Sigma$. Bewijs dat f_π een 1-1 afbeelding op is.

ii) Bewijs: aantal even permutaties in Σ = aantal oneven permutaties in Σ = $\frac{1}{2}(n!)$. (Aanwijzing: kies $\pi \in \Sigma$ oneven en beschouw f_π).

15. i) Gegeven zijn permutaties $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ van $\{1,2\}$. Zij nu R een 2-dimensionale lineaire ruimte over k, met basis e_1 en e_2. Definieer dan lineaire afbeeldingen $A_1, A_2 : R \to R$ als volgt: $A_1(e_i) = e_{\pi_1(i)}$, $A_2(e_i) = e_{\pi_2(i)}$, $i = 1,2$.
Geef de matrices van A_1 en A_2 t.o.v. de basis e_1, e_2.
Bepaal $\det(A_1)$ en $\det(A_2)$ (zie (3.6)).
Vergelijk $\det(A_j)$ met $sg(\pi_j)$, $j = 1,2$.

ii) Gegeven is de permutaties $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Zij S een 3-dimensionale lineaire ruimte over k, e_1, e_2, e_3 een basis van S. De lineaire afbeelding $A : S \to S$ wordt gedefinieerd door $A(e_i) = e_{\pi(i)}$, $i = 1,2,3$.
Bepaal de matrix van A t.o.v. de basis e_1, e_2, e_3.
De determinant van een 3×3-matrix wordt pas in de volgende paragraaf gedefinieerd. Wat vermoedt u echter over $\det(A)$?
Matrices zoals in i) en ii) optreden noemt men wel permutatie-matrices.